

مدل دینامیکی رتبه کاسته POD اصلاح شده برای شبیه سازی جریان های ناپایای تراکم ناپذیر

محمد طیبی رهنی^۳
دانشکده مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی شریف

فریدون ثابت قدم^۲
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
(تاریخ دریافت: ۸۹/۰۸/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۰۵/۰۳)

محمد کاظم مؤیدی^۱
گروه مهندسی مکانیک
دانشگاه قم

چکیده

در این مقاله، از روش رتبه کاسته تجزیه متعامد بهینه جهت شبیه سازی میدان های جریان ناپایای تراکم ناپذیر استفاده شده است. معادلات حاکم بر جریان پس از تصویر سازی در راستای مودهای جریان منجر به ایجاد یک سامانه دینامیکی رتبه کاسته می شوند. از آنجا که معمولاً مدل های رتبه کاسته متداول، به دلیل های گوناگونی، پیش بینی دقیقی از تغییرات زمانی میدان جریان ندارند، دقت سامانه دینامیکی حاکم با استفاده از یک ترم اصلاح خطی افزایش داده شده است. روش مذکور ترکیبی از روش تجزیه متعامد بهینه همراه با حل یک مسئله بهینه سازی با استفاده از روش کمترین مربعات است. حاصل آن یک مدل رتبه کاسته خواهد شد که می تواند با دقتی مناسب و با سرعتی بالا تغییرات زمانی میدان جریان را پیش بینی کند. این روش بر اساس یک تکنیک کمینه سازی محلی است که توسط این نویسندگان ارائه شده است. نتیجه های حاصل از مدل رتبه کاسته حاضر با شبیه سازی های حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده که دقت و سهولت چشم گیری را در محاسبات نشان می دهد.

واژه های کلیدی: جریان ناپایا، روش تجزیه متعامد بهینه، مدل رتبه کاسته اصلاح شده، تصویر سازی گالری

Calibrated Low-dimensional POD Dynamical Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows

M.K. Moayedi
Dep't. of Mech. Eng.
Univ. of Qom

F. Sabetghadam
Dep't. of Mech. and Aerospace Eng.
Sci. and Research Branch
Islamic Azad Univ.

M. Taeibi-Rahni
Dep't. of Aerospace Eng.
Sharif Univ. of Tech.

(Received: 8 Nov., 2010; Accepted: 25 July, 2011)

ABSTRACT

In this paper, reduced order proper orthogonal decomposition method has been used for simulation of unsteady incompressible flow fields. After projection of the governing equations along POD modes, a low-dimensional dynamical system is achieved. Normally, standard low-dimensional models, due to some reasons, do not predict time variations of flow field accurately. Accuracy of dynamical system has been improved by using a linear calibration term. The presented method is based on combination of POD and an optimization problem, which is solved using least square approach. The obtained reduced order model can predict time variations of flow field with relatively fast computational speed and good accuracy. This method is based on a local minimization technique proposed by these authors. The results have been compared with direct numerical simulation (DNS) data and shows good accuracy and simplicity of the computations.

Keywords: Unsteady Flow, Proper Orthogonal Decomposition, Calibrated Low-dimensional Model, Galerkin Projection

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): moayedi@alum.sharif.edu

۲- استادیار: fsabet@sbiau.ac.ir

۳- استاد: taeibi@sharif.edu

۱- مقدمه

جریان است. این موضوع می‌تواند ناشی از دلایلی از جمله عدم انتخاب مناسب نمایه‌ها، دقت پایین حل عددی و یا ناتوانی سامانه دینامیکی در کاهش سطح انرژی مودهای پرنرژتری باشد. در این خصوص روش‌هایی جهت افزایش دقت سامانه‌های دینامیکی پیشنهاد شده که از جمله می‌توان به روش فاویر^۸ و همکارانش [۹] اشاره کرد. آنها با استفاده از حل یک مسئله بهینه‌سازی و ترکیب آن با معادلات حاکم، به جواب‌های مناسبی دست یافتند. هم‌چنین با استفاده از حل هم‌زمان مسئله بهینه‌سازی و یک مسئله کمکی^۹ پاسخ زمانی سامانه دینامیکی حاکم بر مسائلی که فیزیک پیچیده‌تری دارند را نیز دقیق‌تر به دست آوردند. کاپلت^{۱۰} از چند روش مختلف که همگی بر اساس حل یک مسئله بهینه‌سازی بود، به منظور بهبود بخشیدن پاسخ سامانه دینامیکی حاکم برای مسائل دو و سه بعدی مورد نظر استفاده کرد [۱۰]. نوآک^{۱۱} نیز از ترم اصلاح^{۱۲} که به منظور افزایش دقت سامانه دینامیکی به کار می‌رود، به عنوان جایگزینی برای ترم فشار حذف شده در معادله سامانه دینامیکی استفاده کرد [۱۱]. در این مقاله، هدف استفاده از این روش برای مدل‌سازی میدان جریان ناپایا است. روندی که در این پژوهش به کار گرفته شده و فرم جدید آن توسط این نویسندگان ارائه شده، ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه همراه با حل یک مسئله بهینه‌سازی است ولی مسئله کمینه‌سازی به صورت محلی و به منظور محاسبه ترم اصلاح حل خواهد شد.

۲- مدل‌سازی رتبه کاسته

تعاریف متفاوتی وابسته به مفهوم و موضوع از مدل‌سازی رتبه کاسته وجود دارد. در اصل مدل‌سازی رتبه کاسته در حوزه سیستم و تئوری کنترل توسعه داده شده است که در رابطه با ویژگی‌های سامانه‌های دینامیکی و کاربرد روش‌های کاهش مرتبه به منظور کاهش پیچیدگی‌های مسئله با حفظ رفتار ورودی و خروجی آنها بحث می‌کند. امروزه بحث مدل‌سازی رتبه کاسته به عنوان یک موضوع پژوهشی جذاب در مباحث سیستم، کنترل و تحلیل‌های عددی مطرح است.

روش تجزیه متعامد بهینه^۱ کاربردهای وسیعی در توسعه مدل‌های رتبه کاسته^۲، پردازش تصاویر و بازسازی داده‌ها و ساختارها دارد. این روش با محاسبه یک مجموعه از بردارهای پایه که می‌توانند ساختارهای پرنرژتری سیستم را تسخیر کنند، آغاز شده است. در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل شده از این بردارهای پایه، می‌توان با کمک آن دینامیک حاکم بر میدان را با تعداد ابعاد کمتر و با دقتی مناسب بازسازی کرد. در یک تعریف کلی باید گفت این روش یک دستگاه مختصات n بعدی متعامد ایجاد می‌کند که نسبت به همه دستگاه‌های مختصات متعامد n بعدی دیگری که برای توصیف دسته نمایه از یک میدان مفروض می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، تقریب بهتری را نتیجه می‌دهد. بدین ترتیب می‌توان توصیفی رتبه کاسته از سامانه‌های دینامیکی با بعد بی‌نهایت ارائه کرد که با تعداد جملات معلوم بهینه باشد. البته، لازم به ذکر است که این بهینگی از دید باز یافت انرژی در مدل رتبه کاسته است. این روش ابتدا و به صورت مستقل توسط کارهون^۳ و لوو^۴ به عنوان روشی جهت تحلیل داده‌های آماری که دارای نوعی الگو^۵ بودند، مطرح شد [۱]. با مطرح شدن روش نمایه توسط سیرویش^۶، این روش به عنوان ابزاری کارآمد به منظور ایجاد مدل‌های رتبه کاسته برای سامانه‌های دینامیکی پیچیده‌ای که داده‌هایی از تجربه و یا حل‌های عددی مستقیم دارند، نمایان شد. استفاده از روش POD - نمایه^۷ در تحلیل و بازسازی میدان‌های جریان پایا و ناپایا تاکنون با موفقیت‌های بسیاری انجام گرفته است [۶-۲].

استفاده از این روش به منظور مدل‌سازی جریان‌های ناپایا با رویکرد سامانه دینامیکی اخیراً مورد توجه بسیاری قرار گرفته، اما مشکلاتی نیز در توسعه این مدل‌ها وجود داشته است. از جمله مسائلی که بسیاری از کارهای پژوهشی با آن مواجه بوده، عدم دستیابی به نتیجه‌های مطلوب یا به عبارتی ناتوانی سامانه دینامیکی در پیش‌بینی دقیق تغییرات زمانی

1- Proper Orthogonal Decomposition (POD)

2- Low-dimensional

3- Karhunen

4- Loeve

5- Pattern

6- Sirovich

7- Snapshot

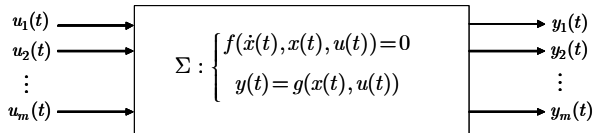
8- Favier

9- Adjoint

10- Couplet

11- Noack

12- Calibration



شکل (۱): نمایی از یک سامانه دینامیکی مفروض با ورودی و خروجی معلوم.

در نتیجه پیچیدگی این سیستم با تعداد متغیرهای حالت آن مشخص خواهد شد (به عنوان مثال n بعد برای بردار فضای حالت). معادله (۱) به صورت زیر نیز قابل بازنویسی خواهد بود:

$$F\left(\frac{dx}{dt}, x, u\right) = 0. \quad (2)$$

بنابراین، مدل سازی رتبه کاسته می تواند به صورت کاهش ابعاد بردار فضای حالت مطرح شده باشد، در حالی که خصوصیات رابطه بین ورودی و خروجی حفظ شود. به بیان دیگر، یک سامانه دینامیکی جدید به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}(\hat{x}, u), \quad (3)$$

$$y = \hat{g}(\hat{x}, u).$$

به طوری که ابعاد \hat{x} خیلی کمتر از n (ابعاد بردار فضای حالت اصلی) خواهد بود. به طور کلی یک مدل رتبه کاسته باید دارای ویژگی های زیر باشد:

۱. ویژگی های سامانه دینامیکی اصلی با یک تقریب کم حفظ شود (مانند پایداری)،
۲. روند کاهش مرتبه بایستی از نظر محاسباتی کارا باشد و
۳. بازسازی یک مدل که بتواند بهترین تقریب را از سامانه دینامیکی با ابعاد محدود خواهد بود و به صورت زیر نشان داده می شود:

۳- مدل دینامیکی رتبه کاسته بر پایه روش POD -

گالری

هنگامی که توابع ویژه یا همان مدهای جریان، معادله پیوستگی را ارضاء کنند، معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم ناپذیر به معادلات ممنوم کاهش می یابد، که این معادلات در فرم برداری و بی بعد به صورت زیر هستند:

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u. \quad (4)$$

مبانی اولیه روش های کاهش مرتبه در ریاضیات به کار فوریه^۱ در سال ۱۸۰۷ برمی گردد که ایده تقریب یک تابع با بهره گیری از توابع مثلثاتی را مطرح کرد. در مسائل جبرخطی لانکوز^۲ مسئله کاهش مرتبه یک ماتریس به یک فرم سه قطری سه قطری را مطرح کرد. بعدها آرنولدی^۳ پی برد که می توان یک ماتریس را با استفاده از یک ماتریس کوچک تر و با تقریب مناسب از ماتریس اصلی تخمین زد. روش های اساسی در مدل سازی رتبه کاسته در دهه ۸۰ و ۹۰ قرن پیش معرفی شدند. در این خصوص می توان به روش متوازن سازی اشاره کرد که توسط مور^۴ در سال ۱۹۸۱ پیشنهاد شد یا گلوور^۵ که که مقالات مشهوری در زمینه کاهش نرم هنکل^۶ چاپ کرد و در نهایت در سال ۱۹۸۷ روش تجزیه متعامد بهینه توسط سیرویش مطرح شد. برای فهم دقیق از مدل سازی رتبه کاسته نیاز به فهم دقیق از مدل های توسعه یافته در علوم محاسباتی شامل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی و معمولی و با شرایط مرزی مناسب است. مثال هایی مهم از این معادلات شامل معادلات ناویر-استوکس در دینامیک سیالات و معادلات ماکسول در الکترومغناطیس است. هنگامی که معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی برای تشریح رفتار یک سیستم به کار می روند اغلب به صورت معادلاتی با متغیرهای مستقل زمانی و مکانی مطرح می شوند که پس از جداسازی مکانی به صورت یک سیستم معادلات دیفرانسیلی معمولی در زمان به دست خواهند آمد. در نتیجه بررسی ها تنها بر روی این سیستم معادلات محدود شده است که به صورت یک سامانه دینامیکی با ابعاد محدود خواهد بود و به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u), \\ y &= g(x, u). \end{aligned} \quad (1)$$

در این معادله، u ورودی، y خروجی و x متغیر حالت سیستم است. بنابراین سامانه دینامیکی به صورت یک سیستم ورودی-خروجی نمایش داده می شود (شکل ۱).

- 1- Fourier
- 2- Lancos
- 3- Arnoldi
- 4- Moore
- 5- Glover
- 6- Hankel Norm

۳-۲- اصلاح سامانه دینامیکی با استفاده از مدل خطی گذرا

مدل‌های رتبه‌کاسته استاندارد، که از تصویرسازی معادلات حاکم بر دینامیک سیال در راستای مدهای POD حاصل می‌شوند، ممکن است دقت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان نداشته باشند. این موضوع می‌تواند ناشی از دلیل‌های زیر باشد:

۱. عدم وجود رابطه‌ای مستقیم بین ضرایب مودال حاصل از میدان سرعت با میدان فشار و در نتیجه تقریب حذف اثرات ترم فشار،

۲. ناپایداری‌های ناشی از حذف مدهای با اعداد موج بالا و

۳. دقت پایین نمایه‌های ورودی که در نتیجه معادلات بقاء را به طور کامل ارضاء نخواهند کرد.

در نتیجه، به منظور بهبود پیش‌بینی زمانی مدل رتبه‌کاسته، یک ترم خطی به صورت زیر به معادله سامانه دینامیکی اضافه می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} = \mathbf{A}_{kij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j + (\mathbf{B}_{ki} + \mathbf{B}'_{ki}) \mathbf{a}^i + \mathbf{C}_k. \quad (8)$$

ترم اضافه شده فوق، که ترم اصلاح نامیده می‌شود، به منظور افزایش دقت سامانه دینامیکی به کار می‌رود و در مرجع [۱۱] از آن به عنوان جایگزینی برای ترم فشار نامبرده شده است. همان‌طور که اشاره شد، ترم فشار پس از تصویرسازی معادلات حاکم در راستای مدهای جریان، در صورت بقایی^۴ بودن مودها و وجود شرایط مرزی همگن و با توجه به رابطه انتگرال گوس حذف خواهد شد. ولی مشکلی که گاهی اوقات به وجود می‌آید این است که به دلیل شرایط موجود در مسئله عبارت فشار قابل حذف نبوده و این می‌تواند به این دلیل باشد که مدهای جریان معادله پیوستگی را ارضاء نکرده است و یا توزیع فشار روی مرزهای میدان به گونه‌ای است که اثرات آن قابل صرف نظر نیست. بنابراین در این شرایط می‌بایست ترم فشار به نحوی محاسبه یا جایگزین شود، که در غیر این صورت بقای موجود در معادلات ممنوم از بین خواهد رفت. هم‌چنین ترم اصلاح می‌تواند مانند یک عبارت استهلاکی در معادله حاکم بر مدل دینامیکی عمل کند و اثرات مدهای پرانرژی را که گاهی سامانه دینامیکی توانایی کاهش سطح انرژی آنها را

بردارهای سرعت به صورت حاصل جمع یک بخش متوسط‌گیری^۱ شده زمانی و یک بخش اغتشاشی^۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad (5)$$

که در آن، ترم اول بخش متوسط بوده که به صورت یک میانگین از تغییرات زمانی بردارهای سرعت است و بخش دوم ترم اغتشاشی است که با استفاده از بسط مدهای جریان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u}'(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^i(t) \phi_i(\vec{x}), \quad (6)$$

به طوری که:

$$\phi_i(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} \varphi_i^u(\vec{x}) \\ \varphi_i^v(\vec{x}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}^i(t) = \begin{Bmatrix} a^i(t) & 0 \\ 0 & b^i(t) \end{Bmatrix}.$$

در روابط فوق، $a^i(t)$ ضریب مودال، $\varphi_i^u(\vec{x})$ شکل مود متناسب با معادله ممنوم در جهت X و $b^i(t)$ و $\varphi_i^v(\vec{x})$ به ترتیب ضریب مودال و شکل مود متناسب با معادله ممنوم در جهت y است.

۳-۱- تصویرسازی گالرکین و معادله سامانه دینامیکی

با بازنویسی معادلات تراکم‌ناپذیر ناویر-استوکس، با استفاده از روابط (۴-۵) و با فرض اینکه مشتق زمانی مقادیر بخش متوسط‌گیری شده صفر باشد (ایستگاهی^۳)، روابط جدیدی حاصل خواهد شد. اگر معادلات حاصل در راستای مدهای جریان تصویر شوند، یک دسته معادله دیفرانسیلی مرتبه اول بر حسب زمان برای ضرایب مودال به دست می‌آید که سامانه دینامیکی نامیده شده و به صورت زیر است:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} = \mathbf{A}_{kij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j + \mathbf{B}_{ki} \mathbf{a}^i + \mathbf{C}_k. \quad (7)$$

معادلات فوق به منظور محاسبه تغییرات زمانی ضرایب مودال می‌بایست حل شده تا ضرایب حاصل برای بازسازی میدان جریان با استفاده از رابطه (۵) به کار روند. لازم به ذکر است که در این پژوهش از روش رانج-کوتای مرتبه چهار به منظور انتگرال‌گیری زمانی معادله سامانه دینامیکی استفاده شده که روش دقیقی جهت حل مسئله‌های وابسته به زمان است.

1- Mean

2- Fluctuation

3- Stationary

4- Divergence Free

اندازه کافی کوچک بوده است و سامانه دینامیکی رفتار نسبتاً پایداری را نشان می‌دهد. مشتقات زمانی به‌کار رفته برای مسئله کمینه‌سازی نیز با استفاده یک روش با دقت مرتبه چهارم محاسبه شده‌اند.

۳-۴- بازسازی سامانه دینامیکی رتبه کاسته

روند طبیعی در یک مدل رتبه کاسته به این صورت است که با افزایش تعداد مودها تقریب حاصل از دقت نزدیک‌تری به حل اصلی برخوردار می‌شود. اما با دقت در نمودار توزیع انرژی مودهای جریان (شکل ۵) این نکته به وضوح دیده می‌شود که با تعداد کمتری از مودها می‌توان سهم بالایی از انرژی موجود در میدان را تسخیر کرد و این بدین معنی است که با روش تشریح شده می‌توان به یک مدل رتبه کاسته دست یافت. بدین منظور و برای محاسبه تعداد مودهایی که درصد انرژی بالاتری را تسخیر می‌کنند، عددی به نام عدد سهم^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_i = \frac{\sum_{i=1}^{N_g} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_{total}} \lambda_i}, \quad (10)$$

که در آن، λ مقادیر ویژه حاصل از حل مسئله مقدار ویژه برای ماتریس داده‌ها است. هرگاه مقدار K_i برابر با $99/9\%$ شد آن‌گاه N_g تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه کاسته را نشان می‌دهد.

۴- شبیه‌سازی عددی میدان جریان

نمایه‌های استفاده شده برای محاسبه مودهای جریان و در نهایت بازسازی سامانه دینامیکی با استفاده از یک کد حل عددی مستقیم جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی که براساس یک روش حجم محدود توسعه یافته، ایجاد شده‌اند [۱۵].

۵- نتایج و بحث

در این قسمت به ارائه و بررسی نتیجه‌های حاصله پرداخته می‌شود. نتیجه‌ها برای جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا حول یک سیلندر مربع‌شکل در $Re = 100$ ارائه می‌شود. به منظور بررسی صحت نتیجه‌های حاصل از مدل رتبه کاسته، داده‌های

ندارد، کمتر می‌کند. این بدین معنی است که مدل دینامیکی به قدر کافی دارای استهلاک نبوده و این افزودگی در سطح انرژی مودها باعث واگرایی در پاسخ حاصل از مدل دینامیکی شده است و افزودن این عبارت سبب می‌شود که مدل دینامیکی ارائه شده رفتار واقعی مسئله را پیش‌بینی کند. در این شرایط ترم اصلاح هم‌چون عبارت استهلاک مصنوعی در معادله حاکم بر مدل عمل می‌کند.

۳-۲-۱- روش کمینه‌سازی کمترین مربعات

روشی که برای محاسبه ضرایب ترم اصلاح خطی ارائه می‌شود استفاده از حل یک مسئله بهینه‌سازی محلی در بازه زمان بوده که توسط نویسندگان پیشنهاد شده و براساس رابطه زیر است [۷]:

$$J = \sum_{r=1}^{N_g} \left[\hat{a}^r(t) - \hat{a}^r(t) \right]^2. \quad (9)$$

در رابطه فوق، $\hat{a}(t)$ مقدار تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از حل عددی مستقیم است که با استفاده از یک روش جداسازی مرتبه چهارم محاسبه می‌شود. $\hat{a}(t)$ مقدار تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه کاسته معمولی و برابر با سمت راست معادله سامانه دینامیکی (رابطه ۶) است. از آنجایی که نمایه‌های استفاده شده برای محاسبه مودهای POD از یک حل دقیق به دست آمده‌اند و فواصل زمانی آنها معادل با فواصل زمانی مدل دینامیکی است، در نتیجه با استفاده از یک کمینه‌سازی محلی نیز می‌توان به نتیجه‌های قابل قبولی دست یافت که نتیجه‌های ارائه شده در این مقاله این موضوع را به خوبی اثبات می‌کند.

۳-۳- جداسازی معادله سامانه دینامیکی و محاسبه

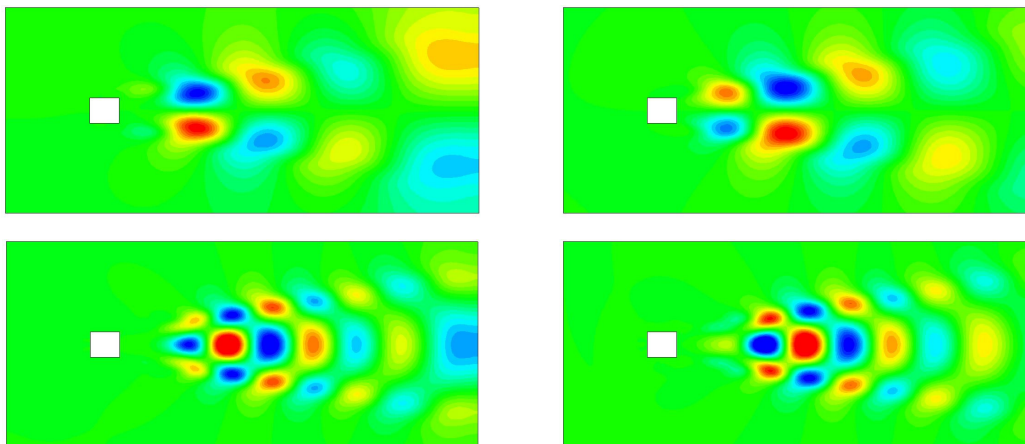
ضرایب مدل

مشتقات وابسته به ضرایب مدل رتبه کاسته (معادله ۶) با بهره‌گیری از یک روش تفاضل مرکزی با دقت مرتبه دوم محاسبه می‌شوند. روش رانج - کوتای چهار مرحله‌ای مرتبه چهارم صریح برای انتگرال‌گیری زمانی معادلات مدل رتبه کاسته به کار رفته است. مطالعه پیرامون گام زمانی نشان می‌دهد که گام زمانی به کار رفته (مساوی با گام زمانی استفاده شده برای تولید نمایه‌های ورودی) برای این مسئله به

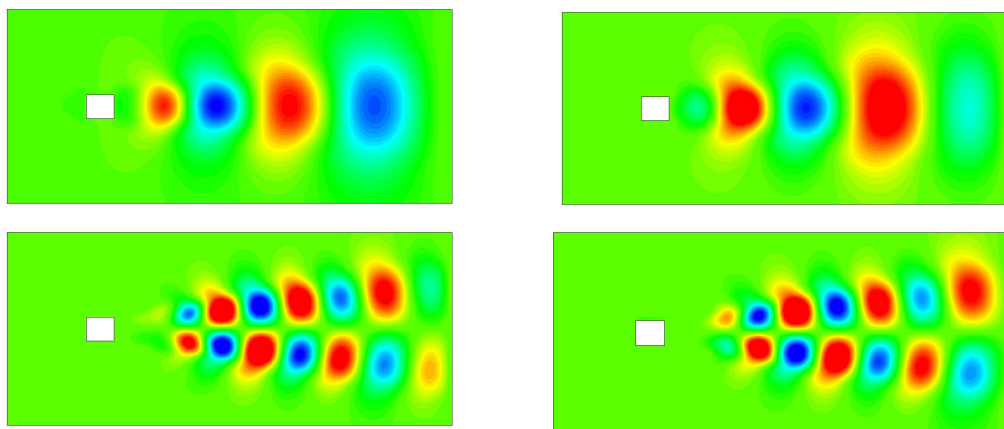
آن از نمودار تغییرات زمانی انرژی جنبشی کل میدان جریان یا ضرایب بی‌بعد (مانند ضریب برآ) به دست می‌آید. پس از انجام یک حل مقدار ویژه مودهای جریان استخراج می‌شوند که در شکل‌های ۱-۲ به ترتیب خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرژتری مؤلفه افقی و عمودی سرعت نمایش داده شده‌است.

حاصل از مدل با نتیجه‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

یک دسته ۲۴۰ تایی از حل میدان جریان در زمان‌های مختلف، با گام‌های زمانی مساوی و در یک بازه زمانی معین به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که این بازه زمانی یک سیکل نوسانی کامل بوده است که اندازه



شکل (۱): خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرژتری مؤلفه افقی سرعت.

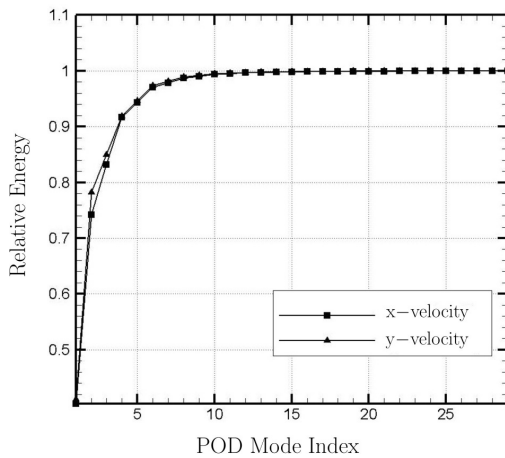


شکل (۲): خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرژتری مؤلفه عمودی سرعت.

می‌توان گفت با توجه به روند متعامدسازی گرام-اشمیت [۴] در فضایی که بر $\varphi(x)$ (مودهای جریان) متعامد باشد، یک فرآیند بیشینگی به منظور محاسبه مودها تکرار می‌شود و در این راه یک سری توابع متعامد که همان مودهای جریان می‌باشند، قابل محاسبه هستند. این توابع هم‌چون مودهای

شکل ۳-۴ به ترتیب طیف انرژی مودهای جریان برای مؤلفه افقی و عمودی سرعت را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، یک جفت‌شدگی^۱ بین مودها وجود دارد که ناشی از تقارن آنها است. در توضیح این مطلب

مقدار ضرایب مودال در اولین گام زمانی است، پیشروی زمانی با استفاده از مدل اصلاح شده انجام می‌گیرد.

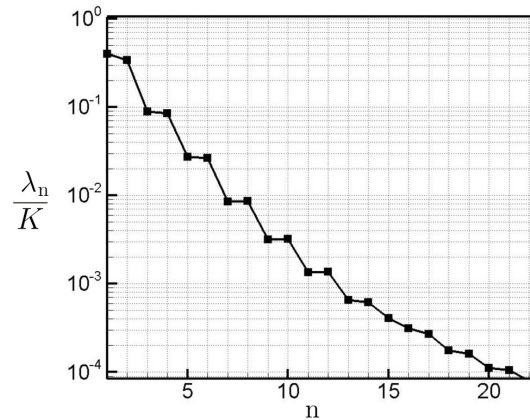


شکل (۵): انرژی نسبی مودهای POD برای مؤلفه‌های سرعت.

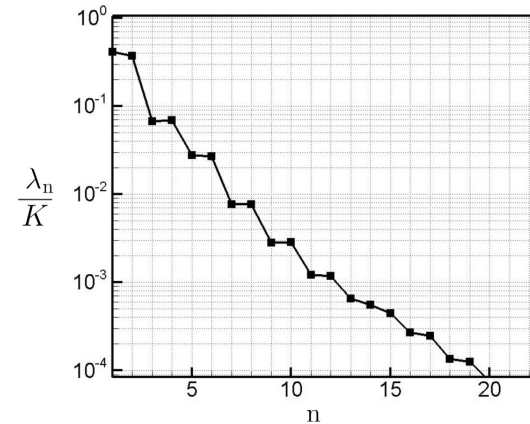
در شکل ۶ نرخ تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول برای مؤلفه افقی سرعت در بازه زمانی معادل با یک چرخه نوسان کامل نمایش داده شده‌است. همان‌طور که در شکل مشخص است، نتیجه‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده از دقت بالایی در مقایسه با نتیجه‌های حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است.

شکل ۷ نرخ تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول برای مؤلفه عمودی سرعت را نشان می‌دهد که نتیجه‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده دقت بسیار بالای این مدل را برای شبیه‌سازی میدان جریان ناپایا نمایش می‌دهد. در شکل تغییرات ضرایب مودال برای مؤلفه افقی سرعت در فضای فاز نمایش داده شده‌است. همان‌طور که در این شکل نیز مشخص است، نتیجه‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده از دقت خوبی در مقایسه با نتیجه‌های حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است. شکل ۹ نیز تغییرات ضرایب مودال برای مؤلفه عمودی سرعت در فضای فاز را نشان می‌دهد و واضح است که نتیجه‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده در مقایسه با نتیجه‌های حاصل از حل عددی مستقیم دقت مناسبی دارد.

فوریه بوده که علاوه بر تعامد دارای یک نوع تقارن^۱ نیز هستند.

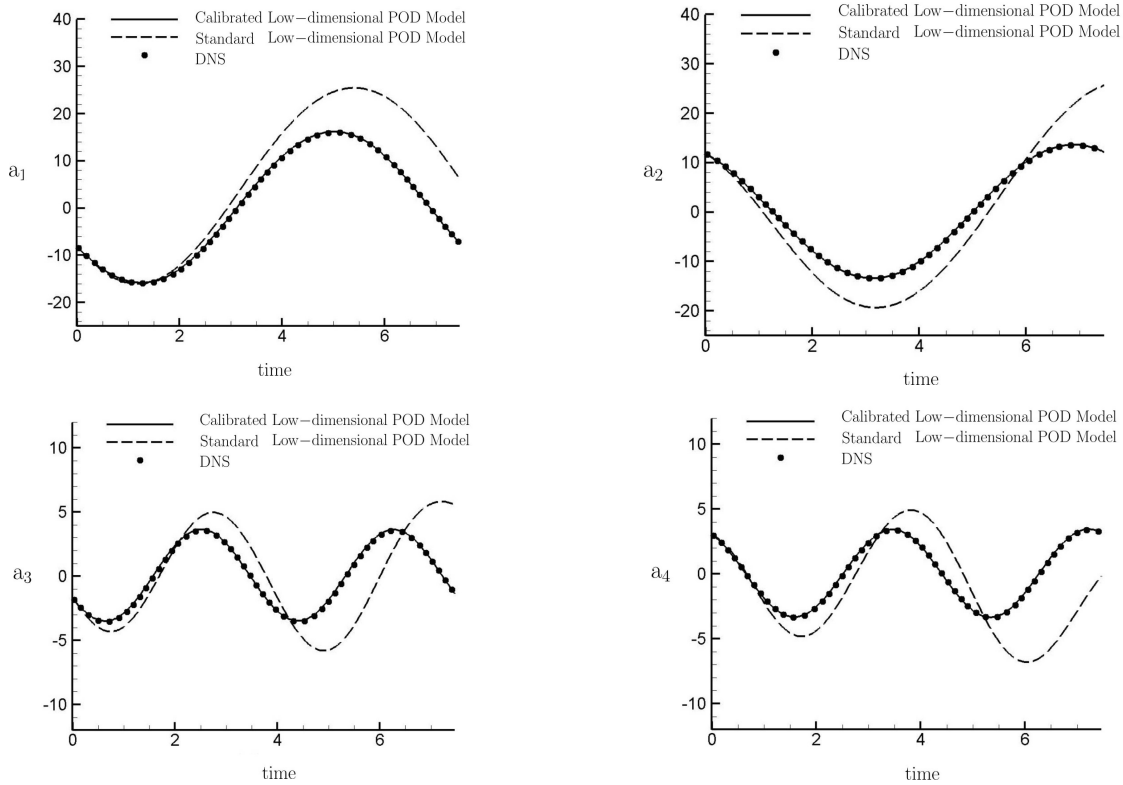


شکل (۳): طیف انرژی مودهای POD برای مؤلفه افقی سرعت.

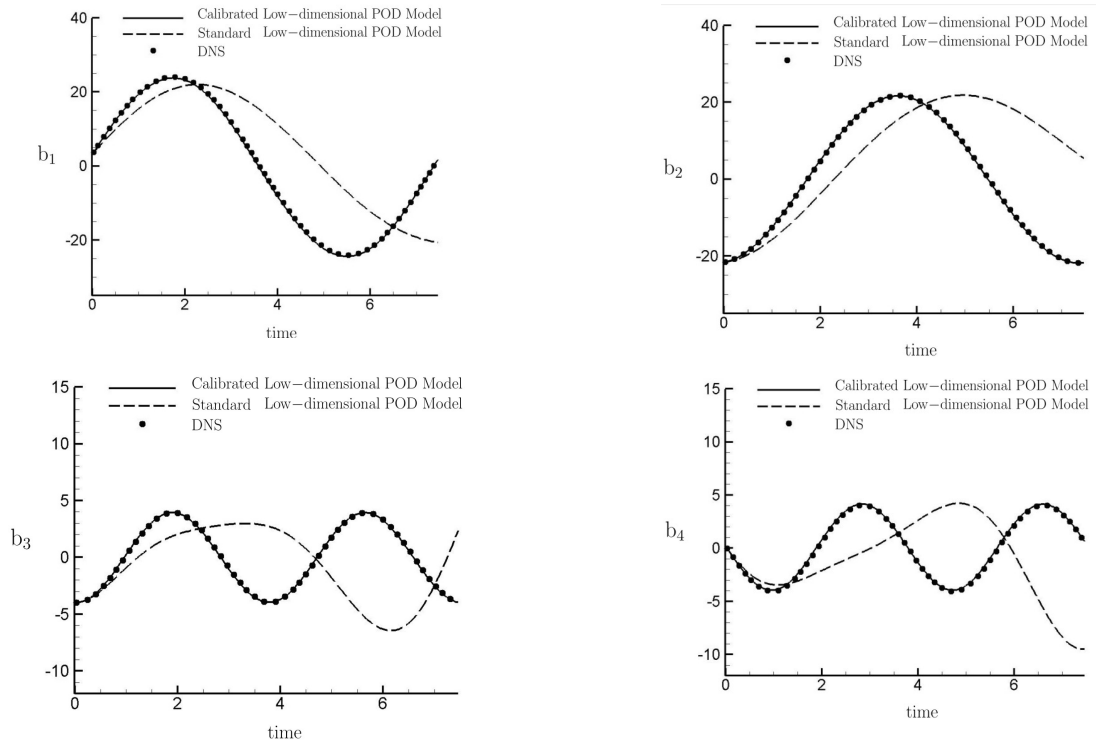


شکل (۴): طیف انرژی مودهای POD برای مؤلفه عمودی سرعت.

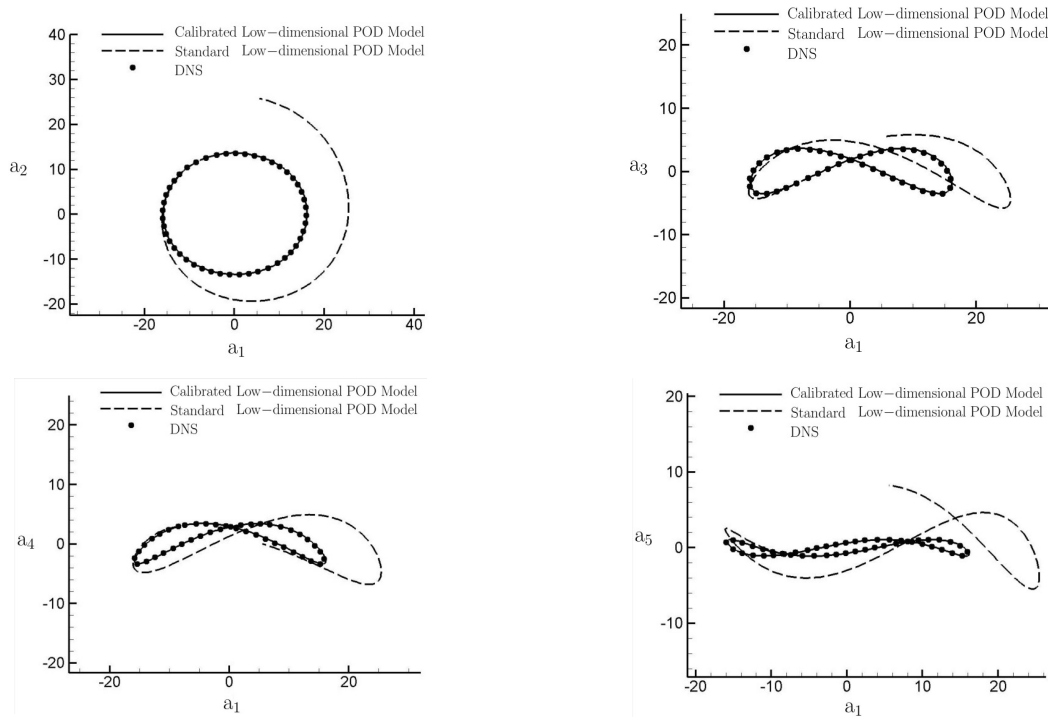
در شکل ۵ نمودار انرژی نسبی مودها برای هر دو مؤلفه سرعت یعنی میزان انرژی که تعداد خاصی از مودها از میدان تسخیر می‌کنند، نشان داده شده‌است. این نمودار تصویرکننده عدد سهم مودها است و با توجه به روش ارائه شده در بخش ۳-۴ تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته محاسبه می‌شود. برای این مسئله شش مود به منظور بازسازی مدل رتبه‌کاسته جهت شبیه‌سازی میدان جریان مورد استفاده قرار گرفته‌است. پس از بازسازی مدل رتبه‌کاسته به صورت یک سامانه دینامیکی و با استفاده از یک شرط اولیه که برابر با



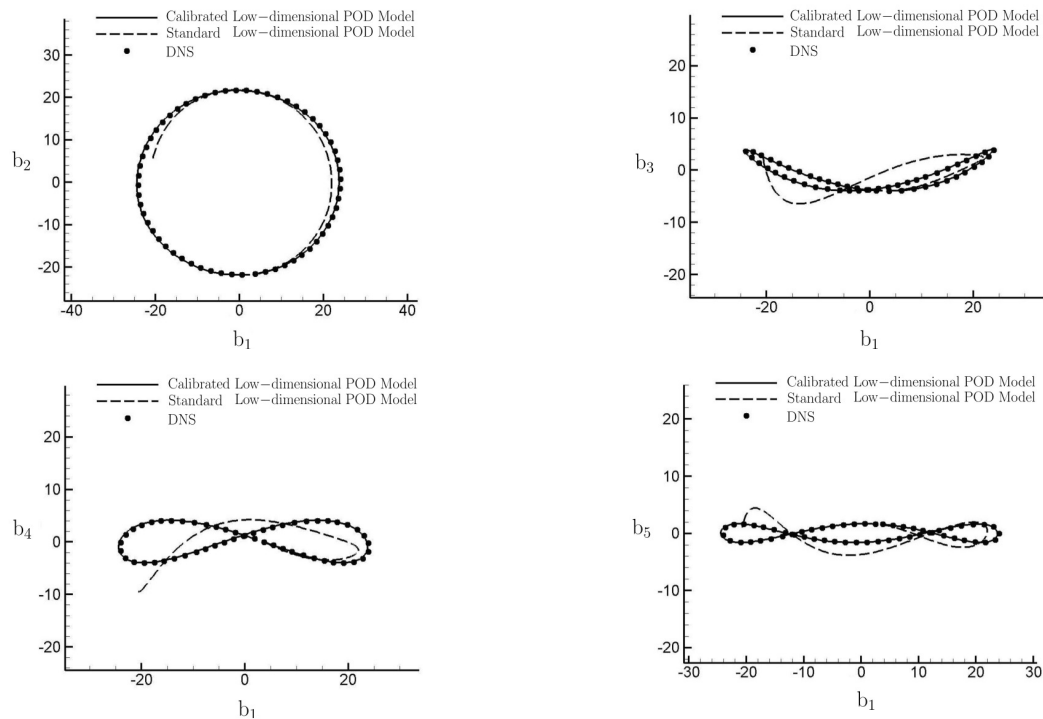
شکل (۶): مقایسه تغییرات زمانی ضرایب مودال برای معادله ممنوم در راستای x (خطوط پیوسته انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده، خط چین انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته استاندارد و نقاط شبیه سازی عددی مستقیم).



شکل (۷): مقایسه زمانی ضرایب مودال برای معادله ممنوم در راستای y (خطوط پیوسته انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده، خط چین انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته استاندارد و نقاط شبیه سازی عددی مستقیم).



شکل (۸): مقایسه تغییرات ضرایب مودال در فضای فاز برای معادله ممنوم در راستای x (خطوط پیوسته انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده، خط چین انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته استاندارد و نقاط شبیه سازی عددی مستقیم).

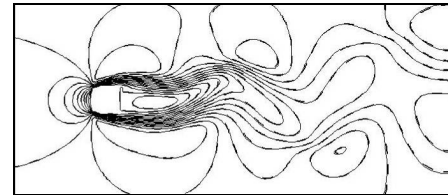


شکل (۹): مقایسه تغییرات ضرایب مودال در فضای فاز برای معادله ممنوم در راستای y (خطوط پیوسته انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده، خط چین انتگرال گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته استاندارد و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم).

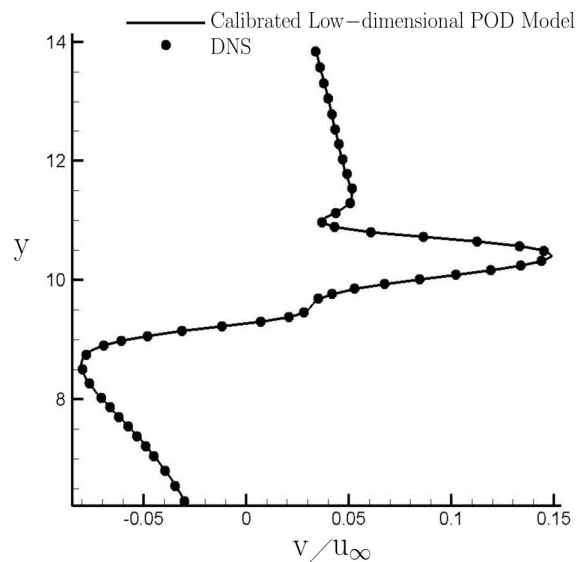
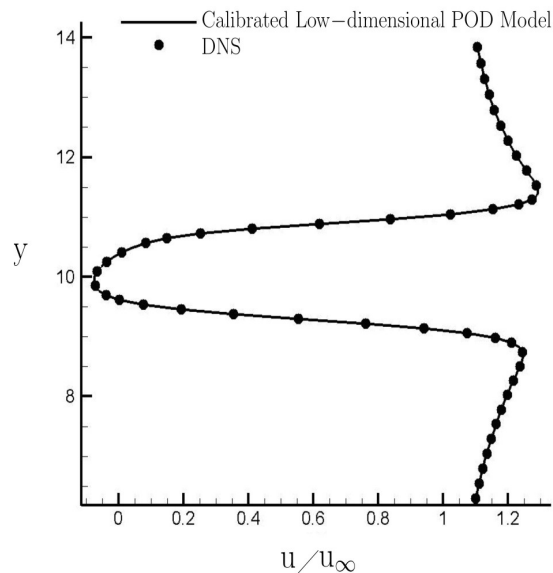
شکل ۱۱ توزیع مؤلفه افقی و مؤلفه عمودی سرعت در راستای عمود بر جریان در $t^* = 5$ و $x = 0.35L$ نمایش می‌دهد که L برابر با طول محدوده محاسباتی در شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان است. لازم به ذکر است که نقطه مورد نظر در ناحیه دنباله قرار گرفته است. همان‌طور که در این شکل واضح است، نتیجه‌های حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح شده دقت آن را با استفاده از یک معیار کیفی اثبات می‌کند.

شکل ۱۲ مقایسه‌ای مقادیر محاسبه شده برای ضریب برآ و ضریب پسا بر حسب زمان حاصل از حل عددی مستقیم و نتیجه‌های حاصل از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده صورت گرفته است. همان‌طور که در شکل مشخص داده‌های حاصل از مدل رتبه کاسته تطابق بسیار بالایی را در قیاس با داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم نشان می‌دهند.

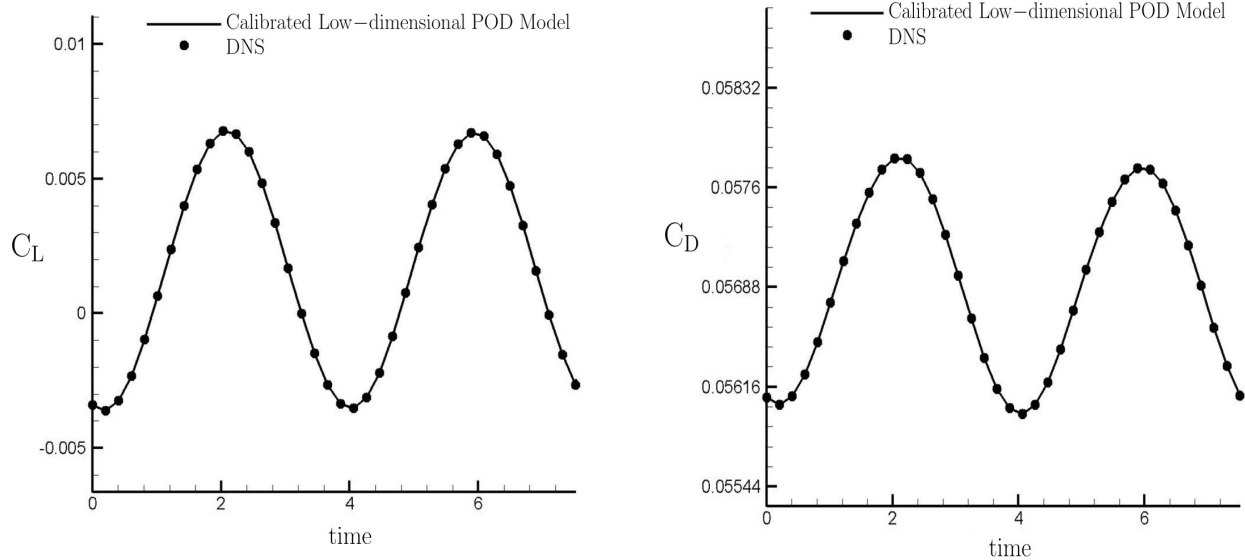
در شکل ۱۰ خطوط هم‌تراز مؤلفه افقی سرعت در زمان $t^* = 5$ حاصل از حل عددی مستقیم و شبیه‌سازی با مدل رتبه کاسته اصلاح شده نشان داده شده است که دقت بسیار بالای این مدل را نشان می‌دهد.



شکل (۱۰): خطوط هم‌تراز مؤلفه افقی سرعت در $t^* = 5$ خطوط پیوسته نتیجه‌های حاصل از انتگرال‌گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده و خط چین حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم.



شکل (۱۱): توزیع مؤلفه افقی سرعت (چپ) و مؤلفه عمودی سرعت (راست) در $t^* = 5$ و $x = 0.35L$ ، خط نتیجه‌های حاصل از انتگرال‌گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم.



شکل (۱۲): توزیع ضریب برآ (چپ) و ضریب پسا (راست) بر حسب زمان خط نتیجه‌های حاصل از انتگرال‌گیری از مدل دینامیکی رتبه کاسته اصلاح شده و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم.

و کاهش زمان چشمگیری را در مقایسه با شبیه‌سازی عددی مستقیم نشان می‌دهد.

مراجع

1. Everson, R. and Sirovich, L., "The Karhunen-Loeve Procedure for Gappy Data", J. Optical Society of America, Vol. 12, No. 8, pp.1657-1664, 1995.
2. Bui-Thanh, T., Damodaran, M., and Wilcox, K., "Aerodynamic Data Reconstruction and Inverse Design, Using Proper Orthogonal Decomposition", AIAA J., Vol. 42, No. 8, pp. 1505-1516, 2004.
3. Sabetghadam, F., Esfahanian, V., and Eftekhari, M., "Application of POD/SVD in Coherent Structures, Extraction of a Homogenous-Statistical Turbulent Field", The 9th Conf. on Fluid Dynamic, Shiraz Univ., Shiraz, Iran, 2004.
4. Sabetghadam, F., Taeibi-Rahni, M., and Moayyedi, M.K., "Application of Low-dimensional POD in Gappy Data Reconstruction of Unsteady Flow Fields", The 1st Iranian Aerospace Soc. Special Symp. in Unsteady Aerodyn., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran 2008.
5. Taeibi-Rahni, M., Sabetghadam, F., Moayyedi, M.K., "Low-dimensional Proper Orthogonal Decomposition Modeling as a Fast Approach of Aerodynamic Data Estimation", J. Aerospace Eng., Vol. 23, No. 1, pp.44-54, 2010.

۶- نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر فعالیت‌های قابل توجهی به منظور پیشرفت مدل‌های رتبه کاسته مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه برای پیش‌بینی دقیق میدان جریان صورت گرفته است. این مقاله نیز به ارائه یک شکل جدید از مدل اصلاح سامانه‌های دینامیکی رتبه کاسته بر پایه روش تجزیه متعامد بهینه و اثبات قابلیت و توانایی آن برای مدل‌سازی دقیق جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر حول یک سیلندر مربع شکل می‌پردازد. در این پژوهش از روش POD-نمایه به منظور محاسبه مودهای جریان استفاده شده و با تصویرسازی معادلات ناویر-استوکس در راستای مودهای POD، سامانه دینامیکی معادل به صورت یک مسئله مقدار اولیه ایجاد شده است. برای اصلاح اثر حذف ترم فشار و میرا کردن اثرات حذف مودهای با اعداد موج بالا که سامانه دینامیکی توانایی مناسب در کاهش انرژی آنها را ندارد، از یک عبارت اصلاح خطی که با بهره‌گیری از یک روش کمینه‌سازی محلی به دست آمده، استفاده شده است. به علاوه، با استفاده از یک روند کاهش مرتبه از تعداد مود کمتری به منظور بازسازی سامانه دینامیکی استفاده شده است. از روش حاضر به منظور انتگرال‌گیری در بازه زمانی کوتاه برای مسئله مذکور بهره گرفته شده که نتیجه‌های دقیق

11. Noack, B., Papas, P., and Monkewitz, P., "The Need for A Pressure-term Representation in Empirical Galerkin Models of Incompressible Shear Flows", *J. Fluid Mech.*, 523, pp. 339-365, 2005.
12. Galletti, B., Bottaro, A., Bruneau, C.H., and Iollo, A., "Accurate Model Reduction for Transient and Forced Wakes", *European J. Mech. B/Fluids*, Vol. 26, No. 3, pp.354-366, 2007.
13. Holmes, P., Lumley, J.L., and Berkooz, G., "Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry", *Cambridge Monographs on Mech.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
14. Sabetghadam, F., Taeibi-Rahni, M., and Moayyedi, M. K., "Gappy Low-dimensional POD: A Powerful Tool for Data Reconstruction of Unsteady Flow Fields", *CFD J.*, Vol. 17, No. 3, pp. 156-164, 2008.
15. Moayyedi, M.K., "Low-dimensional POD Simulation of Unsteady Flow Around Bodies with Arbitrary Shapes", PhD Dissertation, Dep't. of Aerospace Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran, 2009.
6. Taeibi-Rahni, M., Sabetghadam, F., Moayyedi, M.K., "Analysis of Compressible Flow around 2D Bodies, Using Proper Orthogonal Decomposition Methods", *The 7th Iranian Aerospace Society Conf.*, Sharif Univ. Tech., Tehran, Iran, 2008.
7. Moayyedi, M.K., Taeibi-Rahni, M., and Sabetghadam, F., "Calibrated Low-dimensional Dynamical Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows", *The 12th Conference on Fluid Dynamics*, Noushirvani Univ. Tech., Babol, Iran, 2009.
8. Sabetghadam, F., Moayyedi, M.K., and Taeibi-Rahni, M., "A Fast Approach for Calibration of Low-dimensional Dynamical Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows", *The 9th Iranian Aerospace Soc. Conf.*, Azad Univ. Science and Research Branch, Tehran, Iran, 2010.
9. Favier, J., Cordier, L., Kourta, A., and Iollo, A., "Calibrated POD Reduced-order Models of Massively Separated Flows in the Perspective of Their Control", *ASME Joint U.S.-European Fluids Eng. Summer Meeting*, Miami, Florida, USA, 2006.
10. Couplet, M., Basdevant, C., and Saguat, P., "Calibrated Reduced-order POD-Galerkin System for Fluid Flow Modeling", *J. Comp. Phy.* 207, pp. 192–220, 2005.

