

# اثر پارامترهای هندسی بالک‌ها در مشخصات آیرودینامیکی پرتابه‌های مافوق صوت

محمود پسندیده فرد<sup>۱</sup> و عباس خلقانی<sup>۲</sup>

گروه مهندسی مکانیک

دانشکده مهندسی

دانشگاه فردوسی مشهد

(تاریخ دریافت: ۸۹/۱۱/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۹۰/۷/۱۳)

## چکیده

در مقاله حاضر جریان سه بعدی غیر لزج به روش چند بلوکی مجزا برای پرتابه کامل در ماخ ۵ و زاویه حمله ۱ درجه و چندین مدل بالک حل شده است. یک مدل مبنا برای شکل بالک در نظر گرفته شده و سپس با تغییر هندسه بالک و حل جریان برای کل پرتابه، تأثیر این تغییرات روی خواص آیرودینامیکی، از جمله برآ، پسا، ضریب گشتاور پایداری و گشتاور پیچشی بررسی شده است. سپس، ضریب کارایی بالک از ترکیب نیروی محوری و گشتاور پایداری پیشنهاد و الگوریتمی برای طراحی بالک بهینه استخراج شده است. بر اساس این پژوهش، هندسه مناسب بالک آن است که لبه حمله به صورت خط راست و با شیب بزرگ‌تر باشد، لبه پشت بالک محدب و طول بالک‌ها افزایش یابد و تعداد بالک‌ها حدود ۷ باشد.

**واژه‌های کلیدی:** آیرودینامیک، پرتابه، بالک، بهینه سازی، پسا، پایداری

## Aerodynamic Shape Optimization of Supersonic Projectile Fins

M. Pasandideh-Fard and A. Khalghani

Mech. Eng. Group

Faculty of Eng.

Ferdowsi University of Mashhad

(Received: 12 Feb., 2011; Accepted: 5 Oct., 2011)

### ABSTRACT

The aim of this work is to find an efficient aerodynamic-based design algorithm for projectile fins and configuration shape optimization. Three-dimensional supersonic flow over a projectile with fins at Mach number 5 and one degree angle of attack was studied. The Runge-Kutta method and multi-block technique was used to solve the governing equations. A basic configuration was assumed for the fins. The front and rear straight edges of the fins were replaced with polynomial curved edges and the aerodynamic effects were considered. Using this method, the optimized shape of these edges were achieved. At this step, the geometrical parameters of fins and projectile were changed and their effects on drag and stability moment were investigated. The CFD code was ran for several different geometries and the effect of each parameter was investigated. At the end, the design algorithm of fins was derived and configuration shape optimization of projectile's body and fins for one example was presented.

**Keywords:** Aerodynamics, Shape Optimization, Projectile Fins, Projectile, Drag, Stability

۱- دانشیار: fard\_m@um.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری (نویسنده پاسخگو): akhalghani@gmail.com

## ۱- مقدمه

تحلیل جریان هوا حول یک جسم و مطالعه تأثیر پارامترهای هندسی آن در خواص آیرودینامیکی، در مکانیک سیالات از اهمیت زیادی برخوردار است. تحقیقات بسیاری جهت بهینه‌سازی هندسی اجسام پرنده برای کاهش پسا، افزایش برآ، افزایش پایداری و ... انجام شده است. هندسه دماغه و بالک‌های مورد استفاده در موشک‌ها و پرتابه‌ها، نقش عمده‌ای در تعیین میزان پایداری و ضرایب آیرودینامیکی دارد. تحقیقات زیادی در راستای بهینه‌سازی شکل دماغه و بالک‌ها به منظور بهبود خواص آیرودینامیکی موشک‌ها و پرتابه‌ها انجام شده است. در فرآیند بهینه‌سازی بایستی هدف مشخصی را تعریف کرد و بهینه شدن یک پارامتر معمولاً با نامناسب شدن پارامترهای دیگر همراه است و بنابراین گاهی پارامترهای ترکیبی جدیدی تعریف می‌شوند. هم‌چنین فرآیند بهینه‌سازی عموماً با یک یا چند محدودیت همراه است. رایج‌ترین این محدودیت‌ها ثابت بودن قطر کلی (کالیبر) و وزن کلی است. روش‌های بهینه‌سازی مونت کارلو<sup>۱</sup>، الگوریتم ژنتیک<sup>۲</sup> کمترین شیب تغییرات<sup>۳</sup> بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند ولی بسیاری از کارهای تحقیقاتی بر اساس مقایسه هندسه‌های متنوع انجام شده است.

یانگ<sup>۴</sup> و همکارانش [۱] هندسه بالک‌های هدایت‌کننده جلو و بالک‌های پایدارکننده عقب یک موشک هدایت‌شونده را به نحوی بهینه کردند که موشک بیشترین برد را داشته باشد. موشک مورد نظر آنها در طی مسیر خود تنوعی از جریان‌های مافوق صوت، گذر صوت و مادون صوت را تجربه می‌کند و در واقع نقطه طراحی مشخصی وجود ندارد و برد نهائی دربرگیرنده ترکیبی از آثار تمامی رژیم‌های مذکور است. آنها با استفاده از اصلاح ضرایب آیرودینامیکی و تحلیل دینامیک پرواز نشان دادند بالک‌های بهینه شده قادرند در صورت هدایت ۲۱/۴ درصد و در صورت عدم هدایت ۵/۸ درصد برد موشک مبنا را افزایش دهند و این نمونه‌ای از منافع بهینه‌سازی است.

حکمت و همکارانش [۲]، به روش کمترین شیب تغییرات

به بهینه‌سازی هندسه ایرفویل پرداختند. هدف آنها کاهش پسا، همراه با قید ضریب برآ ثابت، بود. والتر<sup>۵</sup> [۳]، طی یک پروژه تحصیلی، با بهینه‌سازی هندسه دماغه در صدد کاهش نوسان فشار و کاهش ضریب نیروی محوری موشک بوده است. جریان‌های برگشتی انتهایی بال باعث کاهش بالابر می‌شوند. جاکوب و ویرمن<sup>۶</sup> [۴]، اثر بالچه بر کاهش جریان‌های برگشتی را در هواپیمای بدون سرنشین بررسی کردند. آنها شکل بالچه را، بر اساس حداکثر شدن نسبت برآ به پسا، به روش پارامتریک بهینه‌سازی کردند. یانگوان<sup>۷</sup> و همکارانش [۵]، به روش الگوریتم ژنتیک به بهینه‌سازی هندسه بدنه شاتل پرداختند. هدف آنها افزایش نسبت برآ به پسا، افزایش پایداری آیرودینامیکی، کاهش گرمایش آیرودینامیکی و افزایش فضای داخل بدنه بود.

آلن و رندال<sup>۸</sup> [۶]، تیغه روتور یک هلیکوپتر را بهینه‌سازی کردند؛ آنها به دنبال کمترین گشتاور لازم برای دوران روتور بودند و مقدار نیروی بالابر، حجم و گشتاور پیچشی تیغه را به عنوان سه محدودیت در نظر گرفتند. فرها<sup>۹</sup> و همکارانش [۷]، بهینه‌سازی هندسه هواپیمای مافوق صوت را، جهت کمینه‌سازی صدای حاصل از شکست دیوار صوتی، بررسی کردند. آنها در بررسی خود توانستند، با ثابت نگه داشتن نیروی بالابر، فشار امواج شوک را در ماخ ۱/۵ در نوعی هواپیما از ۵۸ به ۳۲ و در هواپیمایی دیگر از ۷۷ به ۷ پاسکال کاهش دهند.

لسیوتره<sup>۱۰</sup> و همکارانش [۸]، در صدد بهبود هندسه بالک‌های موشک برای کاهش گشتاور حول مفصل بالک بوده‌اند تا بتوان از بالک‌های انعطاف‌پذیر سود جست. نلسون<sup>۱۱</sup> و همکارانش [۹] به دنبال بالک‌هایی برای موشک بالستیکی بودند که در کمترین قطر موشک، بیشترین پایداری را ایجاد کنند. نوبهاری و همکارانش [۱۰]، بهینه‌سازی هندسه یک راکت را با هدف افزایش حداکثر برد و کاهش حداقل برد بررسی کردند. آنها در هندسه راکت ۷ پارامتر هندسی مهم را

5- Walter

6- Weierman and Jacob

7- Yongyuan

8- Allen and Rendall

9- Farhat

10- Lesieutre

11- Nelson

1- Monte-Carlo

2- Genetic Algorithms

3- Steepest Descent Algorithm

4- Yang

پارامترهای بالک، مشخصات آیرودینامیکی بررسی شده و روند رسیدن به طرحی مناسب با بیشترین ضریب کارایی ارائه شده است.

برای بهبود بهینه‌سازی، بایستی در گام‌های آینده این پژوهش، با استفاده از دینامیک پرواز اثر تغییرات ماخ و زاویه حمله را نیز در نظر گرفت و با توجه به بالستیک نهایی، به جای ضریب کارایی، پارامتر مناسب‌تری را مد نظر قرار داد که نشان‌دهنده برخورد مؤثرتر پرتابه به هدف زرهی باشد.

## ۲- روش حل عددی، شبکه‌بندی و شرایط مرزی

معادلات ناویر-استوکس برداری در حالت بی‌بعد، تراکم‌پذیر و پایدار در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{E}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\bar{E}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial\bar{E}_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{E}_r = E_r^i - E_r^v, \quad \bar{E}_\theta = E_\theta^i - E_\theta^v, \quad \bar{E}_z = E_z^i - E_z^v,$$

که بردارهای  $E_r^i$ ،  $E_\theta^i$  و  $E_z^i$  بخش غیر لزج و بردارهای  $E_r^v$ ،  $E_\theta^v$  و  $E_z^v$  بخش لزج را شامل می‌شوند. بردارهای شار به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_r \\ \rho u_\theta \\ \rho u_z \\ e \end{bmatrix}, \quad E_j^i = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_r u_j + \delta_{jr} P \\ \rho u_\theta u_j + \delta_{j\theta} P \\ \rho u_z u_j + \delta_{jz} P \\ \rho u_j h \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$E_j^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{jr} \\ \tau_{j\theta} \\ \tau_{jz} \\ u_r \tau_{jr} + u_\theta \tau_{j\theta} + u_z \tau_{jz} - q_j \end{bmatrix}, \quad j \rightarrow r, \theta, z.$$

$u_r$ ،  $u_\theta$  و  $u_z$  مؤلفه‌های سرعت در جهات  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  و  $\rho$  دانسیته،  $P$  فشار و  $e$  انرژی کل هستند. فرم انتگرالی این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{J} \cdot \bar{n} dS = 0, \quad (3)$$

که  $\bar{n}$  بردارهای عمود بر سطح و  $\Omega$  حجم المان هستند. انتگرال‌گیری معادله فوق به معادله زیر منجر می‌شود:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\Omega} (Q(w) + AD(w)), \quad (4)$$

متغیر در نظر گرفتند. در هر وضعیت هندسی، برای کل مسیر پرواز، حاصل جمع ضرایب نیروی عمودی را در ماخ‌ها و زوایای حمله مختلف کمینه یا بیشینه کردند. در این پژوهش از الگوریتم ژنتیک و نیز الگوریتمی مشهور به لانه مورچه استفاده شده است. الغرنی<sup>۱</sup> و همکارانش [۱۱] به دنبال بالک-بالک‌هایی برای یک موشک مافوق صوت بودند که بیشترین نسبت برآ به پسا را ایجاد کنند.

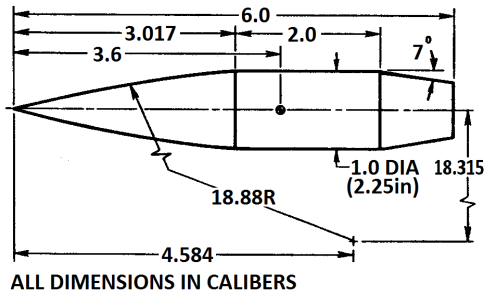
تیزینگر<sup>۲</sup> و همکارانش [۱۴-۱۲]، بهینه‌سازی هندسه دماغه سپر حرارتی مریخ‌نورد را بررسی کردند. هدف آنها دستیابی به هندسه‌ای از دماغه بود که حداکثر پسا، حداقل تولید حرارت، حداکثر پایداری و حداکثر فضای داخلی را دارا باشد. رالابهندي<sup>۳</sup> [۱۵]، نیز در پایان‌نامه دکتری خود، بهینه‌سازی هندسه بدنه یک هواپیمای مافوق صوت را، جهت کمینه‌سازی صدای حاصل از شکست دیوار صوتی، بررسی کرد.

هدف از پژوهش حاضر کاهش افت سرعت و افزایش دقت یک گلوله ضد زره است که در ماخ ۵ به سمت هدفی مستقیم شلیک می‌شود. به دلیل مسیر کوتاه، رژیم جریان تقریباً ثابت است و کاهش افت سرعت با پسا کم و افزایش دقت با پایداری زیاد حاصل می‌شود. بنابراین یک ضریب ترکیبی، از نسبت ضریب گشتاور پایداری به ضریب نیروی محوری، به نام ضریب کارایی تعریف شده است که هدف حداکثر شدن آن است. در این پژوهش یک پرتابه کامل همراه بالک‌های آن در جریان غیر لزج سه‌بعدی با ماخ ۵ و زاویه حمله ۱ درجه مورد بررسی قرار گرفته است و هدف آن است که با تغییر هندسه بالک کمترین نیروی محوری همراه با بیشترین پایداری حاصل شود. محدودیت هندسی مورد نظر ثابت بودن کالیبر است. بدین منظور برای بالک‌ها یک مدل مبنا معرفی و ابتدا تأثیر لبه پشت بالک با فرض ثابت بودن دیگر مشخصات بالک و پرتابه بررسی شده است. سپس لبه جلویی بالک با یک منحنی درجه سوم جایگزین شده تا بتوان لبه بالک‌های متنوعی را تولید کرد و با استفاده از آن شکل بهینه یک بالک با فرض ثابت ماندن بقیه متغیرها به‌دست آمده است. در نهایت با استفاده از نتیجه‌های به‌دست آمده از تغییر بقیه

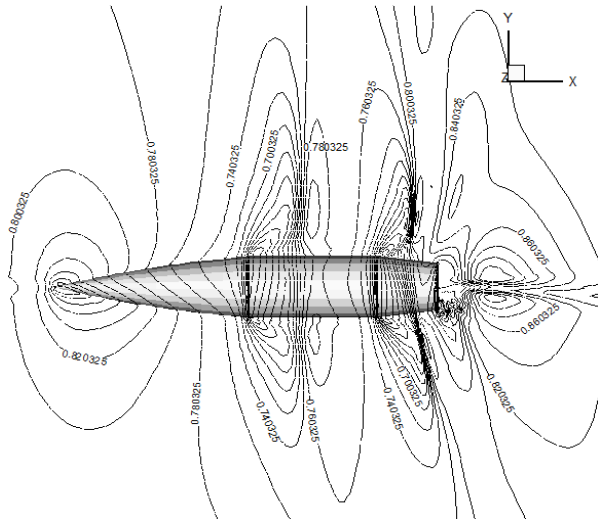
1- Al-Garni

2- Theisinger

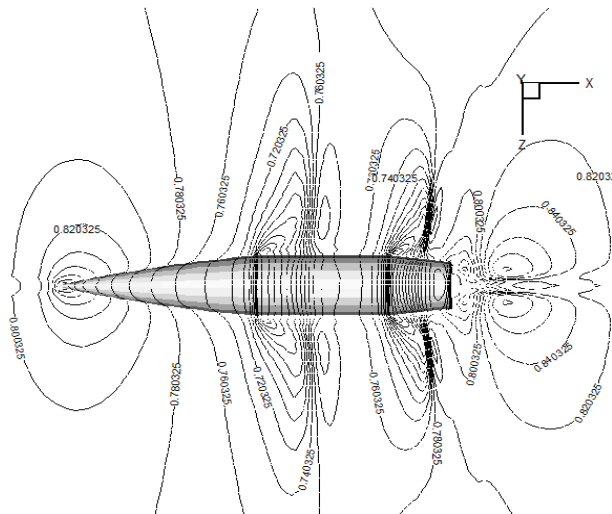
3- Rallabhandi



شکل (۱): هندسه یک پرتابه بدون بالک.



شکل (۲): خطوط هم‌تراز فشار در صفحات رو به باد - پشت به باد و ناحیه پایه پرتابه ( $M_\infty = 0.96, \alpha = 4^\circ$ ).



شکل (۳): خطوط هم‌تراز فشار در صفحه عمود بر صفحات رو به باد - پشت به باد ( $M_\infty = 0.96, \alpha = 4^\circ$ ).

شکل‌های ۲-۳ خطوط هم‌تراز فشار، که این کد در اطراف پرتابه محاسبه کرده است را نشان می‌دهند. این

که  $AD(w)$  ترم اتلافات و  $Q(w)$  شار جابه‌جایی است که با انتگرال‌گیری روی سطح به دست می‌آید.

جیمسون<sup>۱</sup> [۱۶]، برای انفصال معادلات فوق، از روش حجم محدود استفاده و برای گام زنی در زمان روش رانگ- کوتای اصلاح شده را همراه با چند دسته از جملات اتلافی به کار برد. در عمل ثابت شده است که روش رانگ- کوتا روشی بسیار مؤثر برای حل معادلات اوپلر است. در برنامه رایانه‌ای، که برای حل معادلات اوپلر به روش حجم محدود تنظیم شده است، نیز روش چهار مرحله‌ای رانگ- کوتا به کار رفته است که دارای دقت مرتبه دوم در مکان و مرتبه چهارم در زمان است. این روش مذکور از رابطه زیر برای حل معادله (۴) استفاده می‌کند:

$$w^{(k)} = w^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta t}{J^{-1}} [D_r \hat{E}_r^{(k-1)} + D_\theta \hat{E}_\theta^{(k-1)} + D_z \hat{E}_z^{(k-1)} - AD]. \quad (5)$$

در رابطه فوق،  $w^{(0)}$  مقدار  $w$  در ابتدای گام زمانی است.  $k$  نشان‌دهنده مرحله است و برای هر گام زمانی، از یک تا چهار (در طرح چهار مرحله‌ای) تغییر می‌کند. مقدار  $w$  در انتهای گام زمانی، برابر با  $w^{(4)}$  قرار می‌گیرد.  $D$  عملگر تفاضلی و

AD جمله مربوط به اتلاف مصنوعی است. با فرض:

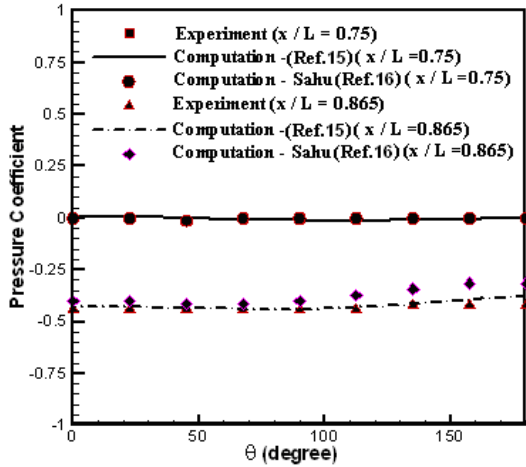
$$R^{(k-1)} = [D_r \hat{E}_r^{(k-1)} + D_\theta \hat{E}_\theta^{(k-1)} + D_z \hat{E}_z^{(k-1)} - AD] \quad (5)$$

رابطه (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

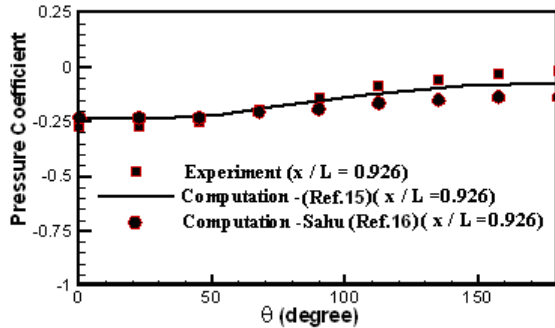
$$w^{(k)} = w^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta t}{J^{-1}} R^{(k-1)}, \quad \alpha_k = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right). \quad (6)$$

ضرایب  $\alpha_k$  به گونه‌ای تعیین می‌شوند که بازه پایداری بیشینه شود. برنامه رایانه‌ای مورد استفاده توسط م. پسندیده فرد، م. ملک جعفریان و ح. منتظری [۱۷-۱۸] ارائه شده است. هم‌چنین اعتبار کد مورد استفاده در مقایسه با نتیجه‌های تجربی برای پرتابه‌های بدون بالک در مراجع [۱۷ و ۱۹]. کاملاً تأیید شده است.

در مراجع مذکور جهت اعتبارسنجی کد، جریان گذر صوتی  $M_\infty = 0.96$  در اطراف پرتابه‌ای بدون بالک شکل ۱ با زاویه حمله  $\alpha = 4^\circ$  توسط این کد مورد حل عددی قرار گرفته است.

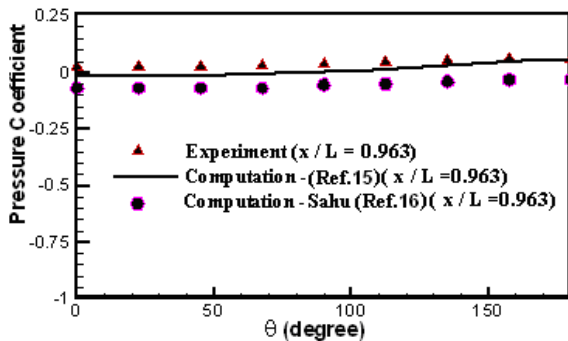


شکل (۶): توزیع ضریب فشار محیطی سطح در موقعیت‌های طولی  $x/L = 0.865, 0.75$ .



شکل (۷): توزیع ضریب فشار محیطی سطح در موقعیت طولی  $x/L = 0.926$ .

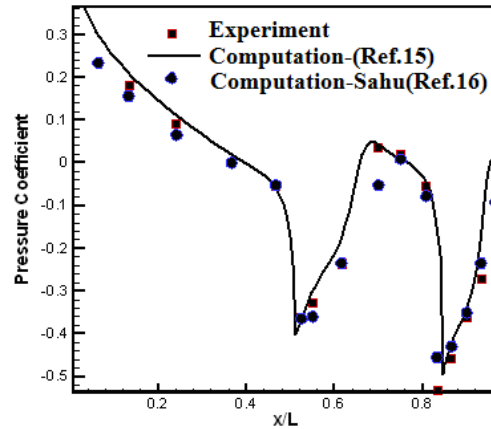
با اطمینان از عملکرد صحیح کد، به تحلیل عددی یک پرتابه بالک‌دار که در شکل ۹ نشان داده شده است، پرداخته شد.



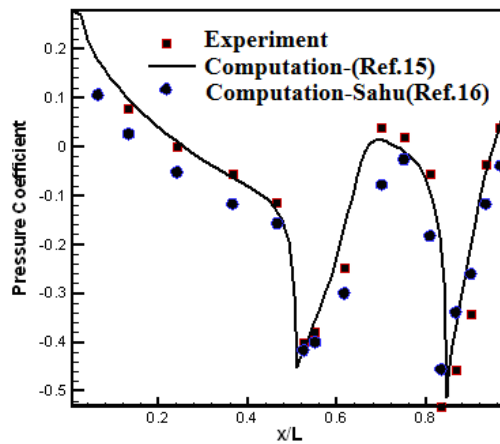
شکل (۸): توزیع ضریب فشار محیطی سطح در موقعیت طولی  $x/L = 0.963$ .

نتیجه‌ها با نتیجه‌های حل عددی ساهو<sup>۱</sup> [۲۰] و اندازه‌گیری‌های تجربی کیسر<sup>۲</sup> و همکاران [۲۱]، در شکل‌های ۴-۸ مقایسه شده است.

ضریب فشار سطح، به صورت تابعی از موقعیت طولی برای صفحات رو به باد و پشت به باد، در شکل‌های ۴-۵ نمایش داده شده است. همچنین در شکل‌های ۶-۸ توزیع فشار محیطی سطح در موقعیت‌های طولی  $x/L = 0.926, 0.865, 0.75, 0.963$  مشاهده می‌شود. در این شکل‌ها تطابق خوبی بین نتیجه‌های این کد با نتیجه‌های عددی ساهو و اندازه‌گیری‌های تجربی کیسر مشاهده می‌شود.



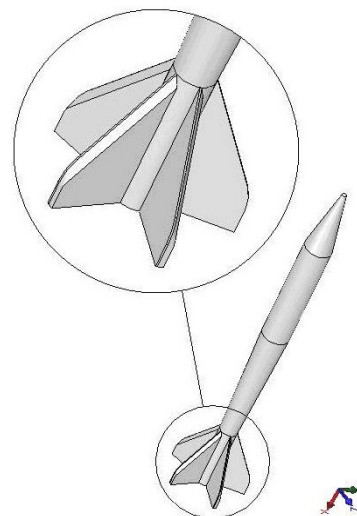
شکل (۴): ضریب فشار سطح در طول پرتابه در صفحه رو به باد  $(M_\infty = 0.96, \alpha = 4^\circ)$ .



شکل (۵): ضریب فشار سطح در طول پرتابه در صفحه پشت به باد  $(M_\infty = 0.96, \alpha = 4^\circ)$ .

1-Sahu  
2- Kayser

با بیش از ۱۲ میلیون گره برای پرتابه‌ای با طول حدود ۵۰ سانتی‌متر بسیار ریز محسوب می‌شود. این شبکه برای تسخیر شوک در ماخ ۵ در نظر گرفته شده و چون حل اولیه خطای عددی کمتری دارد، دقت شبکه ریز بهتر است. جهت حل شبکه‌ای با این تعداد گره و غلبه بر محدودیت‌های رایانه از شبکه چند بلوکی مجزا استفاده شد. این بلوک‌ها المان‌های مشترک مرزی دارند و روش‌های میان‌یابی خاصی برای تعیین خواص جریان در آنها استفاده می‌شود. نحوه شبکه‌سازی چند بلوکی مربوط به مدل‌های مورد تحقیق در این پژوهش، نحوه اعمال شرایط مرزی و نیز روش میان‌یابی دو بعدی در سطح مشترک بلوک‌ها، به طور مشروح در مرجع [۱۸] آمده است.



شکل (۹): نمای کلی پرتابه و بالک‌ها.

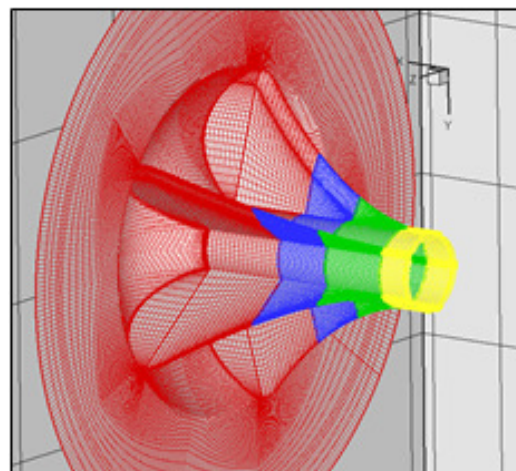
### ۳- پایداری

یکی از موضوعات اساسی در طراحی پرتابه‌ها، پایداری آنهاست. از نظر کمی شرط کافی برای پایداری آن است که مرکز فشار (محل اثر نیروی برآیند آیرودینامیکی) پشت مرکز جرم قرار گیرد. به جز در مورد پرتابه‌های هدایت‌شونده که بایستی قدرت مانور داشته باشند، یک طرح خوب برای بالک‌ها طرحی است که دارای ضریب نیروی محوری  $C_a$  کمتر باشد و نیز باعث شود پرتابه ضریب گشتاور پایداری  $C_{mz}$  بیشتری داشته باشد. پرتابه‌ای که ضریب گشتاور پایداری بیشتر داشته باشد، در شرایط یکسان زاویه حمله کمتر و بنابراین پس‌آی کمتری خواهد داشت.

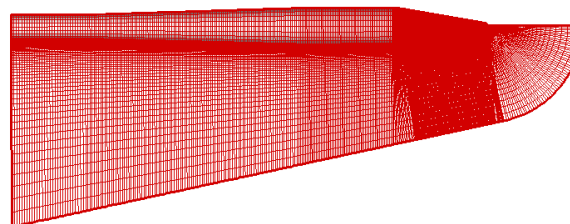
محدودیت‌های در نظر گرفته شده در این پژوهش، این امکان را ایجاد کرده است که بتوان تمام متغیرها را در دو پارامتر ضریب گشتاور پایداری و ضریب پس‌آی خلاصه کرد. در بررسی یک ایرفویل دوبعدی نیز محققین تمام متغیرها را در دو پارامتر ضریب برآ و ضریب پس‌آی خلاصه کرده و تا کنون پژوهش‌های فراوانی برای بهینه‌سازی شکل ایرفویل و حداکثر کردن ضریب ترکیبی  $C_{Lift} / C_{Drag}$  صورت گرفته است. با الهام از روش بهینه‌سازی شکل ایرفویل دوبعدی و برای مقایسه کمی اثرات تغییر شکل بالک‌ها، ضریب بازده  $G$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G = \frac{C_{mz}}{C_a} \quad (7)$$

هر چه مقدار  $G$  بیشتر باشد، بازده طرح بالاتر است.

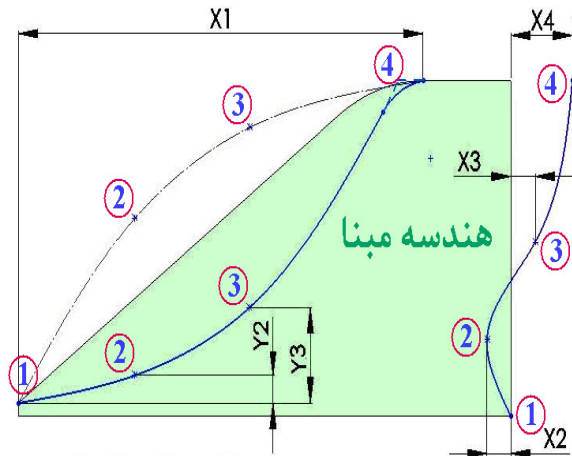


شکل (۱۰): مش‌بندی محیطی (۷۰×۴۰۰) و روی سطح بالک‌ها.



شکل (۱۱): مش‌بندی طولی بدون بالک ۷۰×۴۵۰.

در این پژوهش محاسبات بر اساس حل غیر لزج انجام شده و بنابراین شبکه بر اساس تسخیر شوک و گرادیان فشار ریز شده است و عدم وابستگی حل به شبکه نیز بر این اساس مطالعه شده است. شکل ۱۰ مش‌بندی محیطی و روی سطح بالک‌ها و شکل ۱۱ مش‌بندی طولی را نشان می‌دهد. شبکه‌ای



شکل (۱۳): هندسه مینا و متغیرهای لبه‌های جلو و پشت بالک.

هر کدام از منحنی‌ها با استفاده از ۴ نقطه رسم می‌شوند که یکی از آنها ثابت و بقیه متغیر هستند. متغیرهای لبه جلویی  $X1$ ،  $Y2$  و  $Y3$  و متغیرهای لبه پشتی  $X2$ ،  $X3$  و  $X4$  است. برای به دست آوردن منحنی هموارتر و جلوگیری از ایجاد اعوجاج در ابتدا و انتهای منحنی، که اصطلاحاً پدیده رانج نامیده می‌شود، از چند جمله‌ای‌های چبیشف [۲۲] استفاده شده است. این چند جمله‌ای‌ها پاسخ معادله دیفرانسیل نوع اول چبیشف هستند که در بازه  $[-1, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

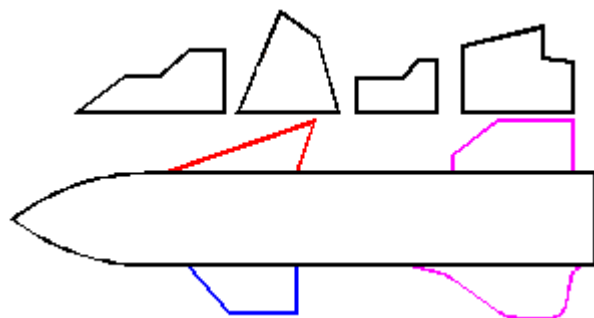
ریشه‌های چبیشف در بازه  $[a, b]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X_i = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad (7)$$

که در آن،  $i = 1, 2, \dots, n$ . برای ایجاد لبه جلویی ابتدا از چهار نقطه  $(X1, Y1)$ ،  $(X2, Y2)$ ،  $(X3, Y3)$  و  $(X4, Y4)$  یک چند جمله‌ای درجه سوم عبور داده می‌شود. از چهار نقطه ذکر شده، مختصات  $(X1, Y1)$  و  $Y4$  مشخص است،  $X2$  و  $X3$  از طریق رابطه گره‌های چبیشف به دست می‌آید.  $X4$ ،  $Y2$  و  $Y3$  به عنوان متغیر در نظر گرفته شده

#### ۴- انحنای لبه‌های پشت و جلوی بالک

بالک‌ها از مهم‌ترین سطوح ایرودینامیکی هستند که عمدتاً به منظور ایجاد پایداری و تولید نیروی برآ طراحی می‌شوند. در پرتابه مورد نظر این پژوهش وظیفه بالک‌ها، که در انتهای پرتابه نصب می‌شوند، تنها ایجاد پایداری است. ولی این بالک‌ها ناخواسته موجب افزایش قابل توجه درگ می‌شوند. به همین دلیل، محققین تلاش گسترده‌ای می‌کنند تا با پیشنهاد هندسه مناسب برای بالک‌ها، با حفظ مشخصه‌های پایداری، درگ را کاهش دهند.



شکل (۱۴): بالک‌های مرکز فشار ثابت و بالک‌های ۳، ۴ و ۵ ضلعی و منحنی.

چون اکثر پرتابه‌ها در طی پرواز خود تغییرات سرعت زیاد دارند، مرکز فشار این سطوح نیز جابه‌جا می‌شود. طرح‌های پیچیده‌ای برای کاهش جابه‌جایی مرکز فشار ارائه شده که در نمای فوقانی از شکل ۱۴ مشاهده می‌شود، ولی انواع بالک‌های رایج‌تر را می‌توان به چهار حالت ۳ ضلعی، ۴ ضلعی، ۵ ضلعی و بالک با لبه‌های منحنی تقسیم کرد (شکل ۱۴).

هندسه مینا بالکی دوزنقه‌ای است که دو گوشه آن قائم و یک گوشه دیگر آن دایروی شده است. به منظور تولید هندسه انواع بالک‌های ذکر شده و به کار بردن یک روش کلی برای مقایسه آنها، دو لبه بالا و انتهای بالک با منحنی‌های درجه سوم جایگزین شده است. بدین ترتیب هم می‌توان بالک‌هایی با لبه‌های منحنی تولید کرد و هم شکل‌های متنوع دیگر را با این منحنی‌ها تقریب زد. شکل ۱۳، نحوه ایجاد این منحنی‌ها را به طور شماتیک نشان می‌دهد.

### ۶-۱- اثر انحنای لبه جلوی بالک

به منظور بررسی اثر انحنای جلوی بالک، به ازای هر مقدار  $X1/Slt$  در فاصله (۰ و ۱)، اندازه‌های  $Y1/h$  و  $Y2/h$  در چند حالت مختلف تغییر داده شده‌اند. مقدار ضریب نیروی محوری به ازای دو مقدار  $X1/Slt$  در جدول ۱ آورده شده است. شکل‌های ۱۷-۱۵ کانتور فشار روی سطح بالک‌های مورد مطالعه در ردیف‌های ۱، ۶ و ۱۰ جدول ۱ را نشان می‌دهند. با توجه به مقادیر و روند تغییرات ضریب نیروی محوری که در شکل ۱۸ نشان داده شده است.

می‌توان گفت که حداقل ضریب نیروی محوری به ازای هر  $X1/Slt$  دلخواه تقریباً در ( $Y1/h=0.31$  و  $Y2/h=0.73$ ) اتفاق می‌افتد. این مقادیر نشان‌دهنده یک خط راست است و اگر لبه جلوی بالک بدون انحنای باشد، نیروی محوری حداقل است. از طرفی ضریب نیروی محوری با افزایش  $X1/Slt$  کاهش می‌یابد. بنابراین،  $X1=Slt$  کمترین نیروی محوری را دارد. نتیجه نهایی آن که بالک مثلی کمترین نیروی محوری را داراست ولی سطح جانبی این نوع بالک نیز کمترین بوده و ضریب پایداری آن نیز کمترین است.

جدول (۱): اثر انحنای جلوی بالک در ضریب نیروی محوری.

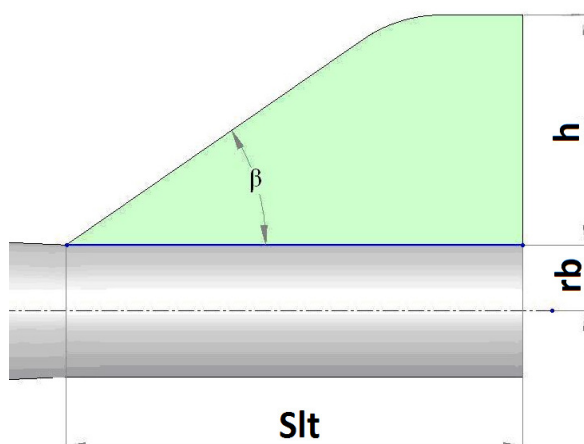
Ca	Y2/h	Y1/h	X1/Slt	
۰/۶۵	۰/۳۱	۰/۱	۰/۹۷	۱
۰/۵۴	۰/۵۲	۰/۱	۰/۹۷	۲
۰/۵۷	۰/۷۳	۰/۱	۰/۹۷	۳
۰/۶۷	۰/۹۴	۰/۱	۰/۹۷	۴
۰/۵	۰/۵۲	۰/۳۱	۰/۹۷	۵
۰/۴۳	۰/۷۳	۰/۳۱	۰/۹۷	۶
۰/۵۷	۰/۹۴	۰/۳۱	۰/۹۷	۷
۰/۵	۰/۷۳	۰/۵۲	۰/۹۷	۸
۰/۵۳	۰/۹۴	۰/۵۲	۰/۹۷	۹
۰/۶۳	۰/۹۴	۰/۷۳	۰/۹۷	۱۰
۰/۶۸	۰/۳۱	۰/۱	۰/۸۸	۱
۰/۵۷	۰/۵۲	۰/۱	۰/۸۸	۲
۰/۶	۰/۷۳	۰/۱	۰/۸۸	۳
۰/۶۸	۰/۹۴	۰/۱	۰/۸۸	۴
۰/۵۱	۰/۵۲	۰/۳۱	۰/۸۸	۵
۰/۴۷	۰/۷۳	۰/۳۱	۰/۸۸	۶
۰/۶۱	۰/۹۴	۰/۳۱	۰/۸۸	۷
۰/۵۳	۰/۷۳	۰/۵۲	۰/۸۸	۸
۰/۵۶	۰/۹۴	۰/۴۲	۰/۸۸	۹
۰/۶۶	۰/۹۴	۰/۷۳	۰/۸۸	۱۰

است. معادله چند جمله‌ای به صورت  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  است. برازش خم به روش گوس-سایدل انجام شده است.

برای ایجاد لبه پشت بالک، همانند روشی که برای ایجاد لبه جلویی بالک به کار گرفته شد، با استفاده از چهار نقطه، یک منحنی درجه سوم رسم شده است. مختصه  $Y$  در این چهار نقطه به وسیله روابط چبیشف به دست آمده و مختصه  $X$  این نقاط نیز به دلخواه تغییر داده می‌شود.

### ۵- پارامترهای هندسی دیگر پرتابه و بالک

بعد از پیدا کردن حالت بهینه لبه‌های جلو و پشت، متغیرهای دیگر بالک و پرتابه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. شکل ۱۴ نمایی از بالک و متغیرهای مورد نظر را نشان می‌دهد. در این پژوهش ابتدا تأثیر تغییر هر یک از پارامترها، در حالی که سایر پارامترها ثابت نگه داشته شده‌اند، بررسی شده است.



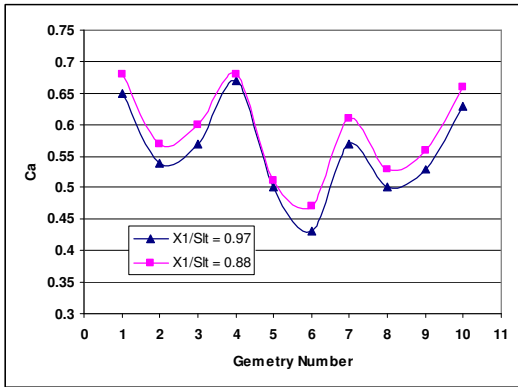
شکل (۱۴): هندسه مبنا و متغیرهای پرتابه و بالک.

پارامترهای متغیر عبارت است از: ارتفاع بالک  $h$ ، تعداد بالک  $n$ ، طول کل بالک  $Slt$ ، زاویه شیب بالک  $\beta$ ، شعاع استوانه انتهایی پرتابه  $rb$ ، در کلیه موارد ماخ جریان آزاد  $5$  و زاویه حمله  $1$  درجه است.

### ۶- نتیجه‌های حل برنامه رایانه‌ای

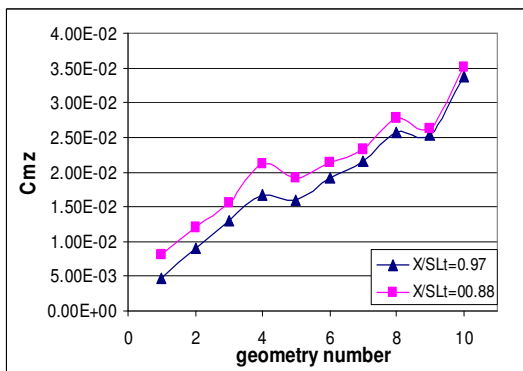
پارامترهای هندسی بالک تغییر داده شده و هر بار برنامه رایانه‌ای اجرا، و اثر هر پارامتر بررسی شده است.



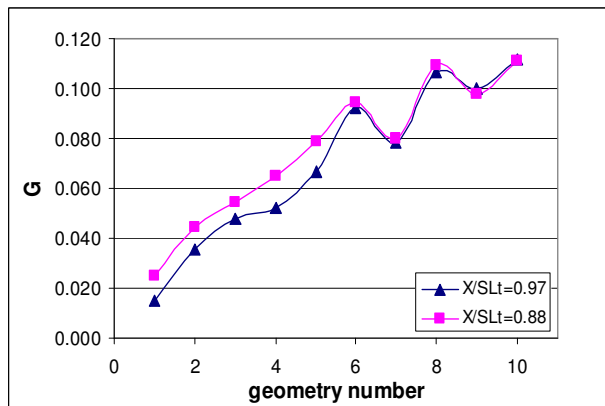


شکل (۱۸): اثر انحنای جلوی بالک در ضریب نیروی محوری.

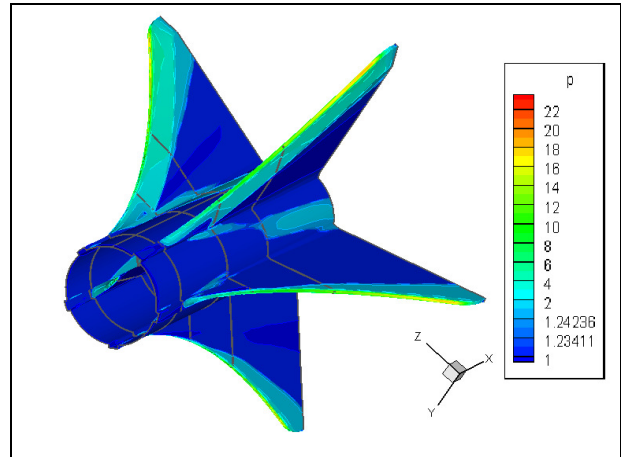
با نگاهی به روند تغییرات ضریب پایداری و ضریب کارایی در شکل‌های ۲۰-۱۹ مشاهده می‌شود که ضریب پایداری و متعاقباً ضریب کارایی بالک محدب (هندسه ۱۰) بیشترین است. علت افزایش ضریب کارایی در بالک محدب آن است که سطح جانبی بالک بسیار بزرگ‌تر است. در این باره در بخش اثر زاویه  $\beta$  بحث خواهد شد.



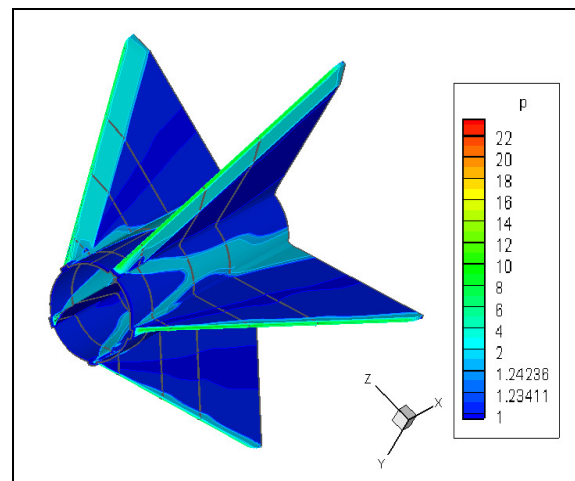
شکل (۱۹): اثر انحنای لبه جلوی بالک بر روی ضریب پایداری.



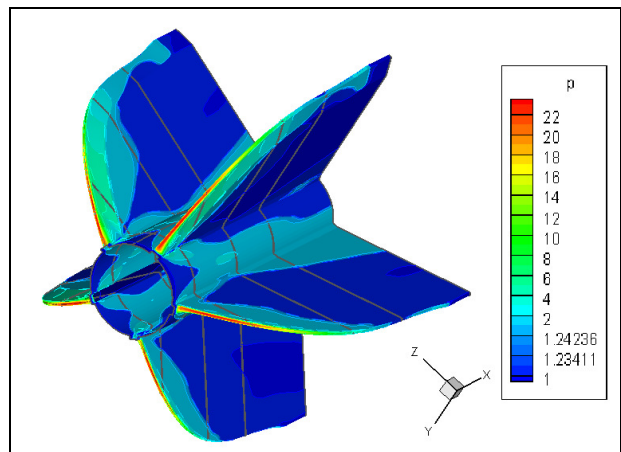
شکل (۲۰): اثر انحنای لبه جلوی بالک بر روی ضریب کارایی.



شکل (۱۵): کانتور فشار روی سطح بالک مقعر (ردیف ۱ جدول).

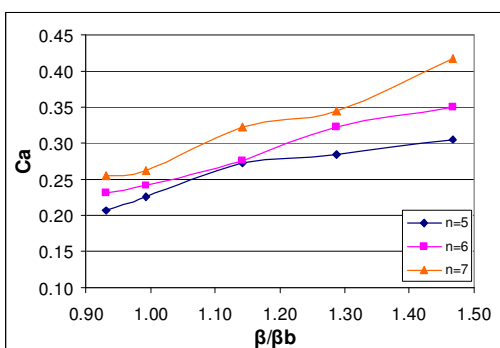


شکل (۱۶): کانتور فشار روی سطح بالک مثلثی (ردیف ۶ جدول).

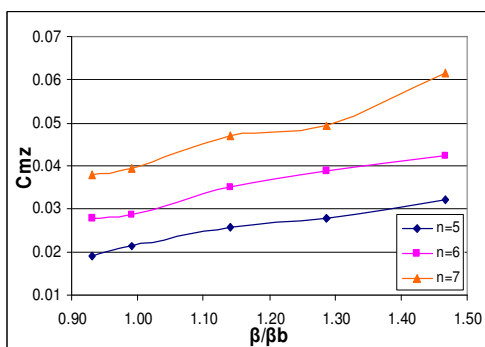


شکل (۱۷): کانتور فشار روی سطح بالک محدب (ردیف ۱۰ جدول).

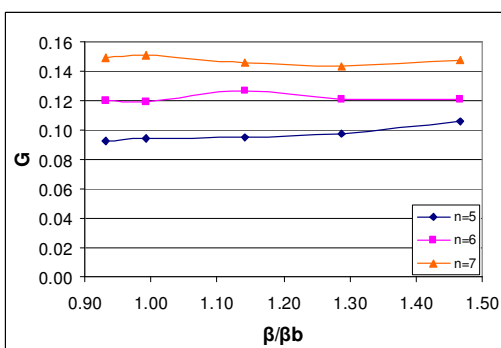
بررسی قرار گرفت. افزایش زاویه  $\beta$  از طرفی موجب بزرگ‌تر شدن سطح جانبی بالک و افزایش پایداری و از سوی دیگر موجب زیاد شدن زاویه برخورد جریان با لبه بالک‌ها و افزایش نیروی محوری می‌شود. شکل‌های ۲۲-۲۳ این موضوع را تأیید می‌کند. همچنین، شکل ۲۴ بیانگر این مطلب است که شیب افزایش گشتاور پایداری اندکی بیشتر از افزایش نیروی محوری است، به عبارت دیگر با افزایش زاویه  $\beta$  ضریب کارایی قدری بیشتر می‌شود.



شکل (۲۲): اثر زاویه شیب بالک‌ها در ضریب نیروی محوری.



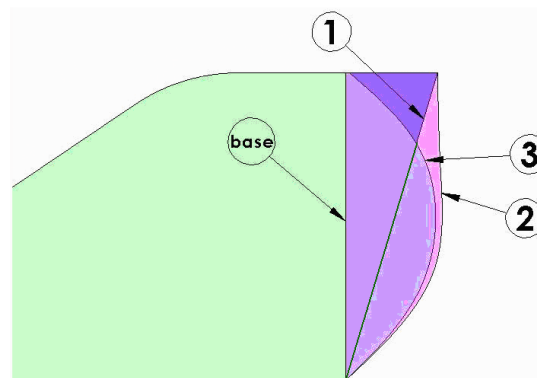
شکل (۲۳): اثر زاویه شیب بالک‌ها در ضریب پایداری.



شکل (۲۴): اثر زاویه شیب بالک‌ها در ضریب کارایی.

## ۲-۶- اثر انحنای لبه پشت بالک

به منظور بررسی اثر انحنای پشت بالک، متغیرهای  $X2/h$ ،  $X3/h$  و  $X4/h$  در بازه  $[-0.3, 0.3]$  در حالت‌های متنوع تغییر داده شده‌اند که سه نمونه آن به علاوه حالت مبنا که خط راست است در شکل ۲۱ و نتیجه‌های آن در جدول ۲ آورده شده است.



شکل (۲۱): حالات مختلف لبه انتهایی بالک.

نتیجه‌ها بیانگر این مطلب است که رابطه ضریب گشتاور پایدارکننده با مساحت سطح جانبی به صورت مستقیم است، یعنی هر قدر مساحت بیشتر باشد ضریب گشتاور پایدارکننده نیز بزرگ‌تر خواهد بود. ضریب درگ نیز تغییر چندانی نشان نمی‌دهد که علت آن ثابت ماندن سطح مقابل جریان است. بنابراین تا حد ممکن باید انحنای شکلی باشد که مساحت سطح جانبی افزایش یابد و محدودیت‌های ساخت، تعیین‌کننده شکل نهایی انتهای بالک است.

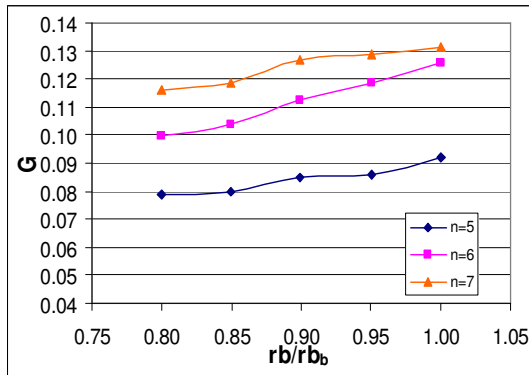
جدول (۲): اثر انحنای پشت بالک در حالات مختلف.

	۳	۲	۱	مبنا	
$X2/h$	۰/۲۷	۰/۳۱	۰/۱۰	۰/۰	
$X3/h$	۰/۲۷	۰/۳۱	۰/۲۱	۰/۰	
$X4/h$	۰/۰	۰/۳۱	۰/۳۱	۰/۰	
$Ca$	۰/۲۲۷	۰/۲۲۷	۰/۲۲۷	۰/۲۲۷	
$Cmz$	۰/۰۲۹۵	۰/۰۳۱۷	۰/۰۲۶۸	۰/۰۲۱۴	
$G$	۰/۱۳	۰/۱۴	۰/۱۲	۰/۰۹	

## ۳-۶- اثر تغییر زاویه شیب بالک‌ها ( $\beta$ )

در هر پرتابه با ۵، ۶ و ۷ عدد بالک، با ثابت نگاه داشتن کالیبر و ارتفاع بالک، به جز هندسه مبنا، چهار زاویه  $\beta$  دیگر مورد

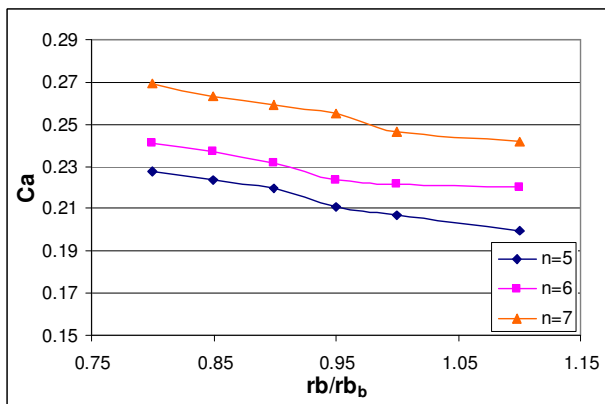
دارد. در نتیجه افزایش شعاع استوانه قسمت پشت بدنه تا حدی که حداقل گشتاور پایداری مورد نظر را تأمین کند، امر مطلوبی خواهد بود.



شکل (۲۷): اثر تغییر شعاع قسمت پشت در ضریب کارایی ارتفاع بالک ثابت.

#### ۵-۶- اثر تغییر شعاع قسمت پشت پرتابه (rb) - کالیبر ثابت

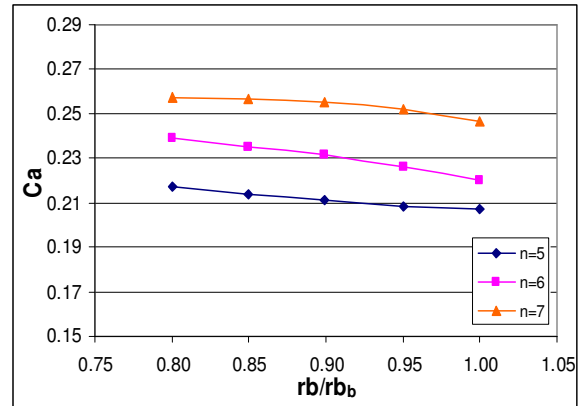
افزایش شعاع قسمت انتهایی بدنه پرتابه (به طوری که مجموع  $rb+h$  و بقیه پارامترهای هندسی ثابت باشند)، باعث کاهش نیروی محوری می‌شود. شدت این کاهش نسبت به حالت قبل بیشتر است. زیرا با افزایش شعاع، ارتفاع بالک کاهش یافته است. افزایش بازوی گشتاور و کاهش سطح بالک دو عامل متناقض است که در نتیجه گشتاور پایداری کمی کاهش می‌یابد. شکل‌های ۲۸-۲۹ بیانگر این موضوع است.



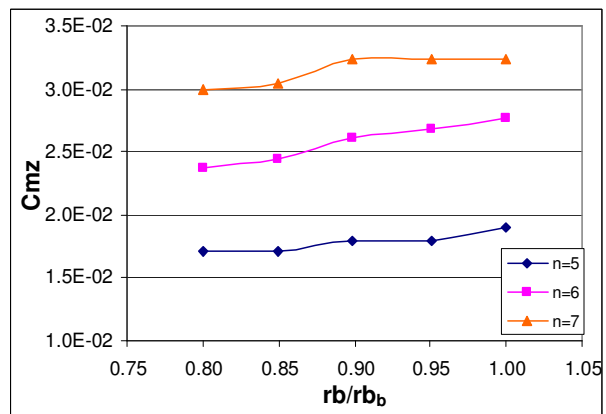
شکل (۲۸): اثر تغییر شعاع استوانه پشت بر ضریب نیروی محوری، کالیبر ثابت.

#### ۴-۶- اثر تغییر شعاع قسمت پشت پرتابه (rb) - ارتفاع بالک ثابت

افزایش شعاع قسمت انتهایی بدنه پرتابه به طوری که بقیه پارامترهای هندسی ثابت باشند، باعث کاهش نیروی محوری می‌شود. به نظر می‌رسد این کاهش نیروی محوری ناشی از کاهش سرعت جریان برخورد کننده به سطح جلوی بالک است.



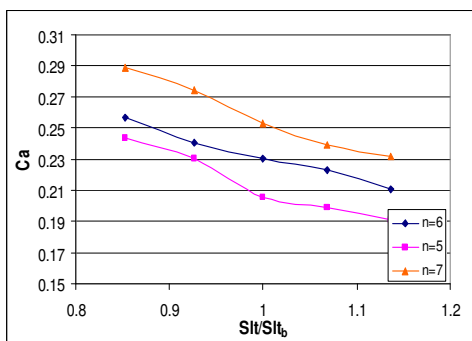
شکل (۲۵): اثر تغییر شعاع قسمت پشت در ضریب نیروی محوری، ارتفاع بالک ثابت.



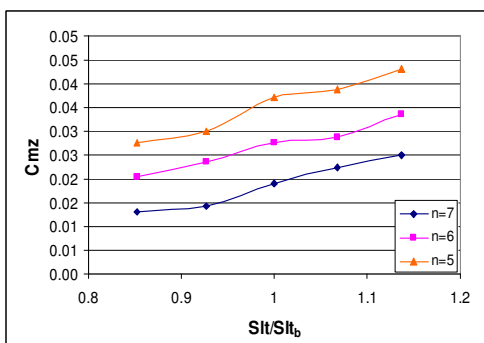
شکل (۲۶): اثر تغییر شعاع قسمت پشت در ضریب پایداری، ارتفاع بالک ثابت.

همچنین افزایش سرعت و کاهش فشار در ناحیه مخروطی و اطراف بالک‌ها موجب افزایش گشتاور پایداری می‌شود. شکل‌های ۲۶-۲۵ بیانگر این موضوع است. با توجه به شکل ۲۷ مشاهده می‌شود که ضریب کارایی افزایش قابل توجهی

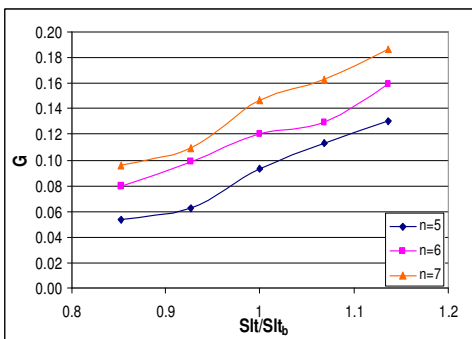
شکل‌های ۳۲-۳۳ نشان می‌دهند که افزایش  $Sl_t$  باعث کاهش قابل توجه نیروی محوری و افزایش پایداری می‌شود. در حقیقت افزایش  $Sl_t$  و ثابت ماندن حالت مثلثی باعث کاهش زاویه شیب جلوی بالک می‌شود و علی‌رغم اینکه تصویر سطح مقابل جریان تغییر نمی‌کند، ضریب نیروی محوری کاهش زیادی از خود نشان می‌دهد. از مجموع استدلال‌ها می‌توان انتظار داشت که ضریب کارایی بالک با افزایش  $Sl_t$  رشد قابل ملاحظه‌ای داشته باشد که شکل ۳۴ این موضوع را تأیید می‌کند.



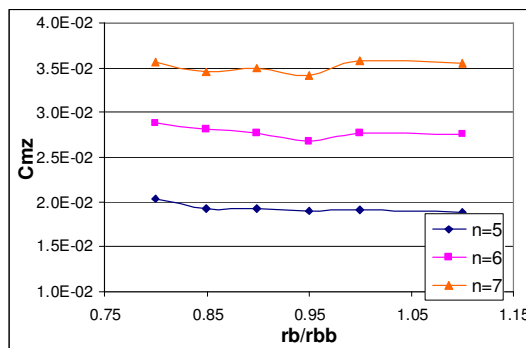
شکل ۳۲- اثر تغییر طول استوانه پشت بر ضریب نیروی محوری.



شکل ۳۳: اثر تغییر شعاع استوانه پشت بر ضریب پایداری.

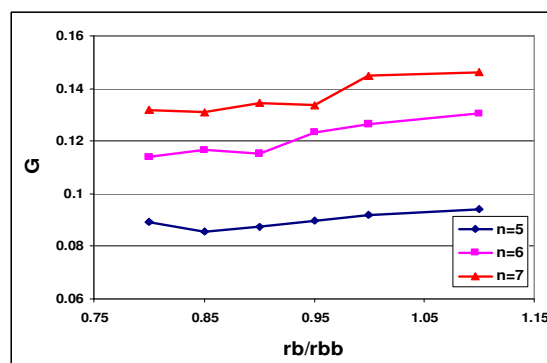


شکل ۳۴: اثر تغییر طول استوانه پشت بر ضریب کارایی.



شکل ۳۹: اثر تغییر شعاع استوانه پشت بر ضریب پایداری کالیبر ثابت.

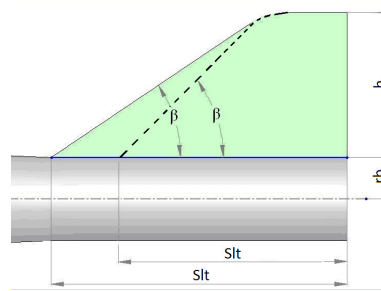
شکل ۳۰ نشان می‌دهد که در مجموع ضریب کارایی افزایش می‌یابد و مشاهده می‌شود که چون تغییرات ضریب پایداری و کارایی کوچک است، در سایه خطای عددی، روند منحنی در  $r_b / r_{bb} = 0.95$  مختل شده است.



شکل ۴۰: اثر تغییر شعاع استوانه پشت بر ضریب کارایی کالیبر ثابت.

### ۶-۶- اثر تغییر طول قسمت استوانه‌ای ( $Sl_t$ )

افزایش طول قسمت استوانه‌ای انتهای بدنه پرتابه و یا افزایش طول کل بالک‌ها باعث افزایش سطح جانبی بالک‌ها خواهد شد (شکل ۳۱).

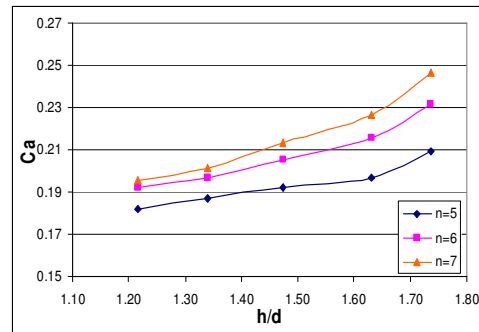


شکل ۴۱: اثر تغییر طول استوانه پشت بر هندسه بالک

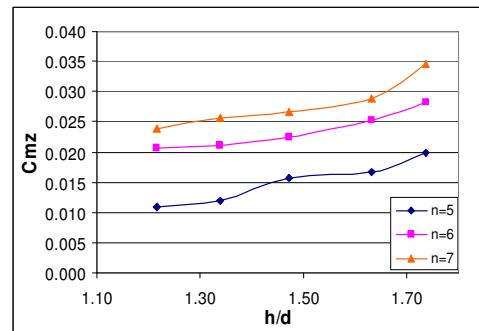
۶-۷- اثر تغییر ارتفاع بالک (h)

افزایش ارتفاع بالک در حالی که بقیه پارامترهای هندسی ثابت هستند باعث افزایش سطح مقابل جریان می‌شود که افزایش ضریب نیروی محوری را در پی دارد. این مطلب در شکل ۳۵ نشان داده شده است.

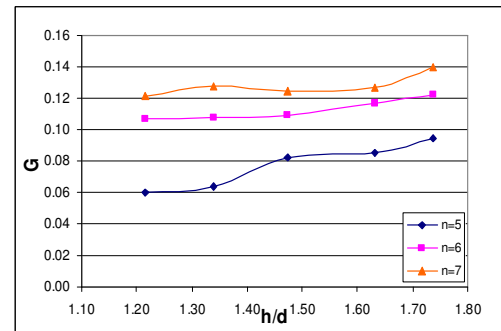
همچنین، مطابق شکل ۳۶ افزایش سطح مقابل جریان موجب افزایش ضریب گشتاور پایداری می‌شود. با توجه به اینکه افزایش سطح جانبی در قسمت انتهایی بالک اتفاق می‌افتد، انتظار می‌رود افزایش ضریب گشتاور پایداری بیشتر از ضریب نیروی محوری باشد. افزایش ضریب کارایی در شکل ۳۷ این موضوع را تأیید می‌کند.



شکل (۳۵): اثر تغییر ارتفاع بالک بر ضریب نیروی محوری.



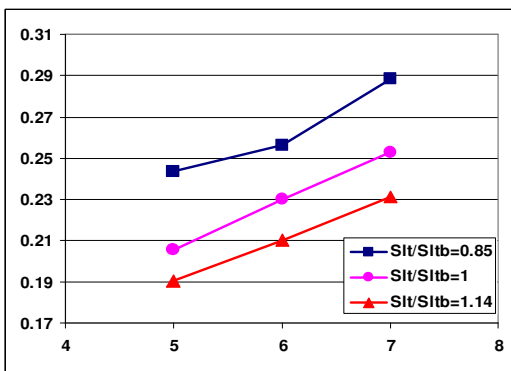
شکل (۳۶): اثر تغییر ارتفاع بالک بر ضریب پایداری.



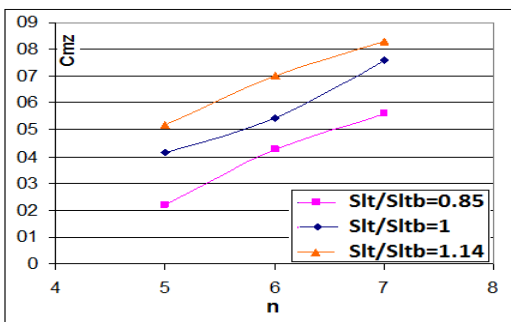
شکل (۳۷): اثر تغییر ارتفاع بالک بر ضریب کارایی.

۶-۸- اثر تعداد بالک (n)

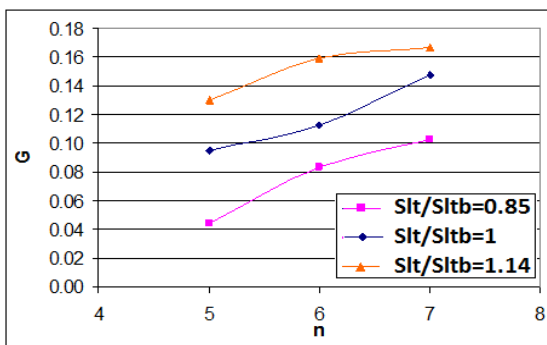
همانطور که انتظار می‌رود طبق اشکال ۳۸ - ۳۹ با افزایش تعداد بالک از ۵ به ۷ ضریب نیروی محوری و ضریب گشتاور پایداری نیز افزایش می‌یابند. شکل ۴۰ نشان می‌دهد در مجموع این دو عامل منجر به افزایش ضریب کارایی می‌شوند. افزایش اثرات بر هم‌کنش بین بالک‌ها در مدل‌های بیشتر از ۷ بالک موجب کاهش نرخ افزایش ضریب پایداری‌کنندگی می‌شود و در نهایت افزایش بیش از حد بالک‌ها منجر به آن خواهد شد که عامل افزایش نیروی محوری موجب کاهش ضریب کارایی شود.



شکل (۳۸): اثر تغییر تعداد بالک‌ها بر ضریب نیروی محوری.



شکل (۳۹): اثر تغییر تعداد بالک‌ها بر ضریب گشتاور پایداری.



شکل (۴۰): اثر تغییر تعداد بالک‌ها بر ضریب کارایی.

- Eng. J. (Fluids & Aerodynamics), Vol. 5, No. 1, pp. 75-86, 2009 (In Persian).
- Walter, T.S. "Methods for Optimization of a Launch Vehicle for Pressure Fluctuation Levels and Axial Force", M.Sc. Thesis, Auburn Univ., 2008.
  - Weierman, J. and Jacob, J.D. "Winglet Design and Optimization for UAVs", The 28th AIAA Applied Aerodyn. Conf., Chicago, Illinois, 2010.
  - Yongyuan, L., Yi, J., and Chunping, H. "Shape Design of Lifting Body, Based on Genetic Algorithm", Information Eng. and Electronic Business, Vol. 2, No. 1, pp 37-43, 2010.
  - Allen, C.B. and Rendall, T.C.S. "CFD-Based Shape Optimization of Hovering Rotors, Using Global and Local Parameters", The 28th AIAA Applied Aerodyn. Conf., Chicago, Illinois, 2010.
  - Farhat, Ch., Mautet, K., Argrow, B., and Nikbay, M. "Shape Optimization Methodology for Reducing the Sonic Boom Initial Pressure Rise", AIAA J., Vol. 45, No. 5, pp. 1007-1018, 2007.
  - Lesieutre, D., Dillenius, M. and Lesieutre, T. "Multi-disciplinary Design Optimization of Missile Configuration and Fin Planforms for Improved Performance", The 7th Symp. on Multi-disciplinary Analysis and Optimization, Saint Louis, MO, 1998.
  - Nelson, A., Nemec, M., Aftosmis, M.J., and Pulliam, T.H. "Aerodynamic Optimization of Rocket Control Surfaces, Using Cartesian Methods and CAD Geometry", The 23<sup>rd</sup> AIAA Applied Aerodyn. Conf., Toronto, Ontario, 2005.
  - Nobahari, H., Nabavi, Y. and Pourtakdoust, H. "Aerodynamic Shape Optimization of Unguided Projectiles, Using Ant Colony Optimization and Genetic Algorithm", The 25<sup>th</sup> Int. Cong. of Aeronautical Sciences, Hamburg, Germany, 2006.
  - Al-Garni, A.Z., Kassem, A.H., and Abdallah, A.M. "Aerodynamic-Shape Optimization of Supersonic-Missiles, Using Monte-Carlo", Int. Review of Aerospace Eng. (I.RE.AS.E), Vol. 1, No. 1, 2008.
  - Theisinger, J.E., Braun, R.D., and Clark, I.G. "Aerothermodynamic Shape Optimization of Hypersonic Entry Aeroshells", The 13<sup>th</sup> AIAA/ISSMO Multi-disciplinary Analysis Optimization Conf., Fort Worth, TX, 2010.
  - Theisinger, J.E. and Braun, R.D. "Multiobjective Hypersonic Entry Aeroshell Shape Optimization", AIAA, Georgia Institute of Tech., 2008.
  - Theisinger, J.E. "Hypersonic Entry Aeroshell Shape Optimization", Space Sys. Design Lab (SSDL), Georgia Institute of Tech., 2007.
  - Rallabhandi, S. "Sonic Boom Minimization through Vehicle Shape Optimization and Probabilistic Acoustic Propagation", PhD Dissertation, Georgia Institute of Tech., 2005.

## ۷- نتیجه‌گیری

بر اساس مطالعات پژوهش حاضر هندسه مناسب بالک آن است که لبه حمله به صورت خط راست باشد، لبه پشت بالک محدب باشد، زاویه شیب  $\beta$  بزرگ‌تر باشد، شعاع قسمت انتهایی بدنه پرتابه افزایش یابد، طول بالک‌ها افزایش یابد و تعداد بالک‌ها را تا حدود ۷ عدد افزایش داد.

محدودیت‌های در نظر گرفته شده برای طراحی بالک‌های پرتابه عبارتند از:

- طول کل پرتابه ثابت باقی بماند و
- مجموع ارتفاع بالک و شعاع قسمت انتهایی  $(h + rb)$  کمتر از شعاع لوله پرتاب کننده باشد. به عبارت دیگر قطر دایره نوک بالک کمتر از کالیبر لوله پرتاب کننده باشد.

روند طراحی بدین صورت است که ابتدا با توجه به محدوده ابعاد پرتابه، بالک دوزنقه با زاویه شیب  $\beta$  بزرگ‌تر و حداقل ارتفاع  $h$ ، حداکثر طول  $Sl_t$ ، و حداکثر قطر استوانه قسمت پشت بدنه پرتابه انتخاب می‌شود.

با نگاهی به منحنی‌ها مشخص است که تمام آنها تقریباً خطی هستند. بنابراین اثر ترکیبی پارامترها بر اساس اصل جمع آثار تخمین زده می‌شود. بررسی اثر ترکیبی پارامترها منجر به معرفی طرحی ۸ بالکی با نسبت ارتفاع  $h/d=1/0.8$  شده است که ضریب درگ آن  $0.7/1$  کمتر و ضریب گشتاور پایدار کننده آن  $0.13/2$  بیشتر از مدل مینا است. در مجموع ضریب کارایی این طرح  $0.21/8$  بیشتر از طرح مینا بوده است. هر چند اکثر نتیجه‌های این مقاله در بسیاری از موارد دیگر به صورت کیفی قابل تعمیم است، ولی بر اساس آنچه در بحث مدل‌سازی مطرح است، این نتیجه‌ها تنها به شرط تشابه هندسی پرتابه و تساوی اعداد بدون بعد مرتبط (به ویژه عدد ماخ)، به صورت کمی قابل تعمیم هستند.

## مراجع

- Yang, Y., Jung, S., Cho, T., and Myong, R. "An Aerodynamic Shape Optimization Study to Maximize the Range of a Guided Missile", The 28<sup>th</sup> AIAA Appl. Aerodyn. Conf., Chicago, Illinois, 2010.
- Izadpanah, E., Hekmat, M.H., and Mirzaei, M., "Numerical Investigation of Adjoint Method in Aerodynamic Optimization", Mech. & Aerospace

19. Malek-Jafarian, M. and Pasandideh-Fard, M. "Three-dimensional Transonic Flow Computations over a Projectile and at the Base Region", JAST, Vol. 2, No. 1, pp. 7-14, 2005.
20. Sahu, J. "Three-dimensional Base-Flow Calculation for a Projectile at Transonic Velocity", AIAA Journal, Vol. 27, No. 2, pp. 138-139, 1989.
21. Kayser, L.D. and Whiton, F., "Surface Pressure Measurement on a Boattailed Projectile Shape at Transonic Speeds", ARBRL-MR-03161, 1982.
22. Arfken, G. "Chebyshev (Tschebyscheff) Polynomials and Chebyshev Polynomials-- Numerical Applications", The 3rd Ed., Orlando, FL, Academic Press, pp. 731-748, 1985.
16. Jameson, A., Schmith, W., and Turkel, E. "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods, Using Runge Kutta Time Stepping Schemes", AIAA, The 14th Fluid Dynamics and Plasma Dynamics Conf., Palo, Alto, California, 1981.
17. Pasandide-Fard, M. and Malek-Jafarian, M. "Full Navier Stokes Computations of Supersonic Flows over a Body at High Angles of Attack and Investigation of Cross Flow Separation", Scientia Iranica J., Vol. 11, No. 4, pp. 339-350, 2004.
18. Montazeri, H. "3D Numerical Analysis & Parametric Study of Supersonic Projectiles with Fins, Using Multi-block Grid Generations", MSc. Thesis, Eng. Faculty of Ferdowsi Univ., Iran, 2005 (In Persian).

