

روش پایه مشخصه سه بعدی و بررسی تاثیر ضریب تراکم پذیری مصنوعی کورین روی دقت و سرعت همگرایی آن

توحید ادیبی^۱

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه بناب

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۵/۲۰)

چکیده

در این مقاله روش پایه مشخصه برای جریان های تراکم ناپذیر سه بعدی ناپایا استفاده شده است. در ابتدا، از فرض تراکم پذیری کورین استفاده شده و سپس معادلات سازگاری و مشخصه های مجازی به دست آمده اند. با حل عددی معادلات مشخصه، ابرمخروط ماخ مجازی چهار بعدی به دست می آید. برای حل عددی این معادلات کدهایی در نرم افزار متلب نوشته شده است. این ابرمخروط در جریان های دوبعدی، یک مخروط سه بعدی خواهد بود. شکل این سطح با حل عددی به دست می آید که برای به دست آوردن این شکل نیز، کدنویسی های دیگری در نرم افزار متلب انجام شده است. شبیه سازی های مختلفی برای جریان های همرفت طبیعی و اجباری با اعداد بی بعد گراشف، رینولدز و پرانتل مختلف انجام شده است. برای این شبیه سازی ها، کدهایی در نرم افزار فترن نوشته شده است. همچنین، در این مقاله تاثیر ضریب تراکم پذیری روی سرعت همگرایی و دقت نتایج بررسی شده است. نتایج نشان می دهد سرعت صوت مجازی تابعی از ضریب تراکم پذیری کورین و جهت انتشار می باشد، در حالی که در جریان های تراکم پذیر سرعت صوت در تمامی جهات ثابت می باشد.

واژه های کلیدی: مشخصه های سه بعدی، جریان تراکم ناپذیر، تراکم پذیری مصنوعی، معادله انرژی، ابرمخروط چهار بعدی، همرفت طبیعی و اجباری

Three-dimensional Characteristic Based Scheme and Artificial Compressibility Factor on Its Accuracy and Convergence

T. Adibi

Mechanical Engineering Department

University of Bonab

(Received: 28/November/2016; Accepted: 11/August/2017)

ABSTRACT

In this paper, the characteristics of three-dimensional incompressible flows were obtained along with artificial compressibility of Chorin. At first, compatibility equations and pseudo characteristics for three-dimensional flows were derived. Results showed that pseudo sound speed in incompressible flow is a function of compressibility parameter and the direction. The speed of sound is constant in compressible flows. By numerical solution of characteristics, four-dimensional pseudo hyper Mach cone was obtained. A code in MATLAB has been written to obtain numerical solution. In two-dimensional flows, one has three-dimensional Mach cone, instead of four dimensional one. This cross section is circle for compressible flows. In this work, natural and forced convections, were simulated in different dimensionless numbers: Reynolds, Prandtl, and Nusselt numbers. For these simulations, a new code has been written in FORTRAN. In the last part of this research, the influence of compressible parameter on accuracy and convergence was surveyed.

Keywords: Three-Dimensional Characteristics, Incompressible Flow, Artificial Compressibility, Convergence History, Energy Equation, Natural and Forced Convections

فهرست علائم و اختصارات

شتاب گرانش زمین	g
عدد گراشف	Gr
ضریب هدایت گرمایی	k
تعداد سلول در جهت x	M
تعداد سلول در جهت y	N
عدد ناسلت موضعی	Nu
فشار	p
عدد پراتل	p
عدد رینولدز	Pr
دما	Re
زمان	T
مولفه‌های سرعت	t
مختصات	u, v, w
بردارهای روی صفحات مشخصه	x, y, z
ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی	W

علائم یونانی

اعداد ثابت و اختیاری	β
ویسکوزیته مطلق	σ
ویسکوزیته سینماتیکی	μ
چگالی	ν

زیر نویس

مرجع	ref
------	-----

۱- مقدمه

بسیاری از روش‌های حل عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر بر پایه روش‌های تصحیح فشار پایه‌ریزی شده‌اند. روش تراکم‌پذیری مصنوعی کورین [۱]، یکی از روش‌های جایگزین می‌باشد. با این روش عبارت $\frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial t}$ به معادله پیوستگی اضافی می‌شود و می‌توان در روش‌های عددی مبتنی بر تکرار با گسسته‌سازی این عبارت فشار را در هر مرحله با اطلاعات مرحله قبلی از معادله پیوستگی به‌دست آورد. در جریان‌های پایا این عبارت معادل صفر می‌باشد و بعد از همگرایی از بین می‌رود $\frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial t}$ و ماهیت اولیه معادلات حفظ می‌شود. همچنین با این تغییر، معادلات ماهیت هذلولی پیدا می‌کنند و امکان تعمیم فن‌های

جریان‌های تراکم‌پذیر برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر را ممکن می‌سازند. تامادیس و همکاران [۲] روش‌های عددی فشار مینا و تراکم‌پذیری مصنوعی را برای شبیه‌سازی جریان‌های آرام تراکم‌ناپذیر لزج با هم مقایسه کردند. نتایج آنها نشان داد که روش تراکم‌پذیری مصنوعی سرعت همگرایی بالاتری دارد. همچنین مزیت دیگر روش تراکم‌پذیری مصنوعی، این است که این روش یک پارامتر برای کنترل همگرایی دارد، اما روش فشار مینا حداقل دو پارامتر برای کنترل همگرایی نیاز دارد. اهوادا و همکارانش [۳] دو روش تراکم‌پذیری مصنوعی را با روش لیتز-بولتزمن مقایسه کرد. نتایج آنها نشان داد روش تراکم‌پذیری مصنوعی از دقت بالاتری برخوردار است. مدل‌سازی و محاسبه جملات شار همرفت در مرز سلول‌ها در روش‌های حجم محدود، از مشکلات اصلی این روش از ابتدا تاکنون بوده است. میانگین‌گیری، از روش‌های متداول استفاده شده می‌باشد. اما این روش‌ها از پایداری کمتری برخوردار هستند. روش‌های پایه مشخصه برای غلبه بر این روش‌ها ابداع شده‌اند. روش‌های پایه مشخصه اولین بار توسط دیریکاکیس [۴-۵] به جریان‌های دوبعدی تراکم‌ناپذیر تعمیم داده شد. زائو و همکارانش [۶-۸] این روش را تعمیم دادند. ادیبی و رضوی [۹-۱۱] روش پایه مشخصه جدیدی معرفی کردند که تعمیم یکی از روش‌های پایه مشخصه مربوط به جریان‌های تراکم‌پذیر بود. در این روش معادله انرژی هم به معادلات اضافی شد. با ترکیب چهار معادله حاکم بر جریان‌های دوبعدی تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما (معادله پیوستگی، معادله اندازه حرکت در دو بعد و معادله انرژی) و بعد از یک سری عملیات ریاضی، معادلات سازگاری و مشخصه‌ها تعیین شدند. معادلات سازگاری روی مشخصه‌ها گسسته شدند و از روی چهار معادله چهار مجهولی خطی به‌دست آمده، فشار، سرعت‌ها و دما تعیین شدند. با این روش جملات همرفت روی مرزهای سلول در زمان جدید به‌دست آمدند. این روش جایگزین روش میانگین‌گیری برای محاسبه جملات همرفت می‌باشد. روش میانگین‌گیری، روش نسبتاً ناپایداری است. بعد از به‌دست آوردن معادلات لازم کدهایی نوشته شد و جریان همرفت آزاد و اجباری آرام را بین دو صفحه موازی، در جریان داخل حفره و در جریان روی استوانه شبیه‌سازی شد. این شبیه‌سازی‌ها در گستره بزرگی از اعداد رینولدز، پراتل، گراشف شبیه‌سازی شد. نتایج نشان داد که سرعت همگرایی و دقت این روش در

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ -g \beta_{\text{exp}} \rho (T - T_{\text{ref}}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

با افزایش مشتق فشار به معادله پیوستگی طبق روش پیشنهادی کورین [۱]، معادله پیوستگی به شرح زیر می باشد:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

معادلات بالا را می توان با عبارات زیر بی بعد کرد:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{U_{\text{ref}}}, \quad v^* = \frac{v}{U_{\text{ref}}}, \\ w^* &= \frac{w}{U_{\text{ref}}}, \quad x^* = \frac{x}{L_{\text{ref}}}, \\ y^* &= \frac{y}{L_{\text{ref}}}, \quad z^* = \frac{z}{L_{\text{ref}}}, \\ p^* &= \frac{p + \rho g y - p_{\infty}}{\rho_{\text{ref}} U_{\text{ref}}^2}, \\ t^* &= \frac{t U_{\text{ref}}}{L_{\text{ref}}}, \\ T^* &= \frac{T - T_{\text{ref}1}}{T_{\text{ref}2} - T_{\text{ref}1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

معادلات حاکم بر جریان، در شکل بی بعد به شرح زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ -\frac{Gr}{\text{Re}^2} T - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \\ \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

مقایسه با روش میانگین گیری بسیار مناسب می باشد. در کار دیگری رضوی و حنیفی [۱۲] کار انجام شده را به جریان های آشفته تعمیم دادند. ایشان در کار خود از مدل اسپالارت-آلماراس برای مدل سازی جریان آشفته استفاده کردند. شبیه سازی های ایشان شامل جریان بین صفحات موازی و جریان روی پله وارون و جریان روی استوانه بود.

زمزمیان و همکارانش [۱۳-۱۵] در کارهای متنوعی روش پایه مشخصه ای برای جریان های تراکم ناپذیر پیشنهاد کردند. آنها شبیه سازی های متنوعی را هم انجام داده اند. در مطالعات عددی دیگری دوستدار و یکانی [۱۶] جابجایی ترکیبی را در یک محفظه مربعی با روش حجم محدود شبیه سازی کردند. همچنین محمودی و ابراهیمی در مطالعه عددی دیگری [۱۷]، جابجایی آزاد و اجباری را در نیروگاه های حرارتی شبیه سازی کردند.

۲- روش پایه مشخصه برای جریان های سه بعدی

معادلات حاکم بر جریان سه بعدی تراکم ناپذیر همراه با انتقال گرما به شرح زیر می باشد. معادله اول معادله پیوستگی و معادله آخر معادله انرژی می باشد. معادلات میانی، معادلات اندازه حرکت در سه جهت به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \\ \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

در همرفت اجباری و طبیعی، چگالی ثابت نیست و از فرض بوسینسک استفاده می شود. در نتیجه معادله اندازه حرکت در جهت y به شرح زیر تغییر می کند.

برای این که معادلات (۵) معادله) بالا، جواب غیرصفر داشته باشد، باید دترمینان ضرایب آن صفر باشد، پس:

$$\begin{vmatrix} n_t & n_x & n_y & n_z & 0 \\ \beta n_x & \Theta & 0 & 0 & 0 \\ \beta n_y & 0 & \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$\Theta = un_x + vn_y + wn_z + n_t.$$

نتیجه دترمینان بالا یک رابطه درجه ۵ خواهد بود که ۵ ریشه خواهد داشت. یکی از ریشه‌ها ریشه سه‌گانه است (سه تا از ریشه‌ها یکسان هستند). ریشه‌ها به شرح زیر می‌باشند:

$$n_t = -un_x - vn_y - wn_z$$

(triple- roots),

$$n_t = \frac{1}{2}(-un_x - vn_y - wn_z \pm \sqrt{(un_x + vn_y + wn_z)^2 + 4\beta}) = \xi. \quad (11)$$

اگر $\mathbf{L} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z + dt \mathbf{e}_t$ خطوط عمود بر بردارهای نرمال در نظر گرفته شوند. پس باید $\mathbf{N} \cdot \mathbf{L} = 0$ باشد. یکی از سری جواب‌های ممکن به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad (12)$$

(three times)

$$\frac{dx}{dt} = -n_x \xi, \quad \frac{dy}{dt} = -n_y \xi, \quad \frac{dz}{dt} = -n_z \xi. \quad (13)$$

خط اول، خط مسیر مجازی را نشان می‌دهد و خطوط دوم مشخصه‌های روی رویه چهاربعدی را نشان می‌دهد. این شکل چهاربعدی در مختصات "X, Y, Z, t" خواهد بود. تصویر شکل چهاربعدی به دست آمده روی صفحه فیزیکی ($t=0$) با حل عددی با فرض $n_x = \cos(\theta)\cos(\phi)$, $n_y = \sin(\theta)\cos(\phi)$, $n_z = \sin(\phi)$. به دست می‌آید. برای به دست آوردن حل عددی معادلات بالا، کدی در نرم‌افزار متلب^۱ نوشته شد. شکل سه‌بعدی به دست آمده از کد نوشته شده، در شکل ۱ نشان داده شده است.

در معادلات بالا علامت ستاره برای سادگی حذف شده است و اعداد بی بعد موجود در روابط به شرح زیر هستند:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{ref} u_{ref} L_{ref}}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k}, \quad (6)$$

$$\text{Gr} = \frac{\beta_{ex} g (T_{ref 2} - T_{ref 1}) L_{ref}^3}{\nu^2}.$$

برای به دست آوردن معادلات سازگاری و مشخصه‌ها، ترکیب خطی روابط بالا به شرح زیر به دست می‌آید (در این روابط، σ ها اعداد ثابت دلخواه هستند):

$$\begin{aligned} & \sigma_1 * \text{Con.} + \sigma_2 * x_{Mom.} + \sigma_3 * y_{Mom.} + \\ & \sigma_4 * z_{Mom.} + \sigma_5 * \text{enrg.} = 0 \rightarrow \\ & \sigma_1 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ & \sigma_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ & \sigma_3 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \\ & \sigma_4 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ & \sigma_5 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

بردارهای زیر ضریب مشتقات در رابطه بالا هستند. مثلاً W_1 شامل مشتقات زمانی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sigma_2 \mathbf{e}_x + \sigma_3 \mathbf{e}_y + \sigma_4 \mathbf{e}_z + \sigma_1 \mathbf{e}_t, \\ W_2 &= (\sigma_1 \beta + u \sigma_2) \mathbf{e}_x + v \sigma_2 \mathbf{e}_y + w \sigma_2 \mathbf{e}_z + \sigma_2 \mathbf{e}_t, \\ W_3 &= u \sigma_3 \mathbf{e}_x + (\sigma_1 \beta + v \sigma_3) \mathbf{e}_y + w \sigma_3 \mathbf{e}_z + \sigma_3 \mathbf{e}_t, \\ W_4 &= u \sigma_4 \mathbf{e}_x + v \sigma_4 \mathbf{e}_y + (\sigma_1 \beta + w \sigma_4) \mathbf{e}_z + \sigma_4 \mathbf{e}_t, \\ W_5 &= u \sigma_5 \mathbf{e}_x + v \sigma_5 \mathbf{e}_y + w \sigma_5 \mathbf{e}_z + \sigma_5 \mathbf{e}_t. \end{aligned} \quad (8)$$

بردارهای عمود بر صفحه ابرمخروط ماخ مجازی در معادله (۹) آورده شده است. در جریان‌های دو بعدی مخروط ماخ مجازی یک شکل سه‌بعدی در فضای سه‌بعدی X, Y, t خواهد بود، اما در جریان‌های سه‌بعدی شکل ایجاد شده، یک شکل چهاربعدی در فضای چهاربعدی X, Y, Z, t خواهد بود. برای همین از عبارت ابرمخروط برای این شکل چهاربعدی استفاده شده است.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{W}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (9)$$

$$\mathbf{N} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z + n_t \mathbf{e}_t,$$

$$\begin{aligned} \frac{-n_y}{n_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{-n_y}{n_x} \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} &= 0, \\ \frac{-n_z}{n_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{-n_z}{n_x} \frac{du}{dt} + \frac{dw}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

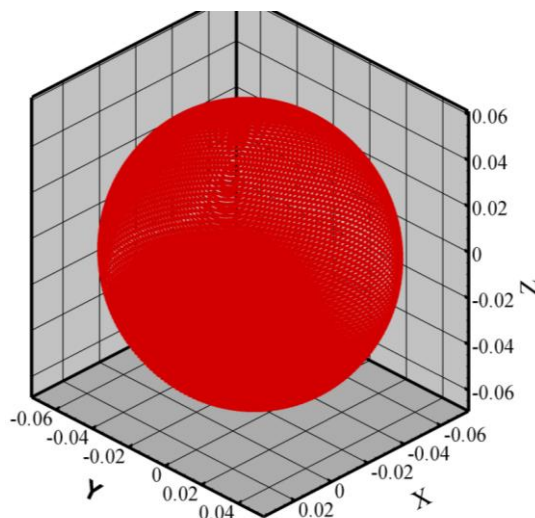
تا اینجا سه معادله سازگاری از پنج معادله سازگاری به دست آمده است. معادلات سازگاری چهارم و پنجم با جایگزینی چهارمین و پنجمین "n_t" به دست آمده در معادله (۹) به شرح زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \text{arbitrary}, \quad \sigma_5 = 0, \quad \sigma_2 = -n_x \xi \sigma_1, \\ \sigma_3 &= -n_y \xi \sigma_1, \quad \sigma_4 = -n_z \xi \sigma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial t} - n_x \xi \frac{\partial p}{\partial x} - n_y \xi \frac{\partial p}{\partial y} - n_z \xi \frac{\partial p}{\partial z} - \\ n_x \xi \frac{\partial u}{\partial t} + (\beta - n_x \xi u) \frac{\partial u}{\partial x} - n_x \xi v \frac{\partial u}{\partial y} - \\ n_x \xi w \frac{\partial u}{\partial z} - n_y \xi \frac{\partial v}{\partial t} - bu \frac{\partial v}{\partial x} + \\ (\beta - n_y \xi v) \frac{\partial v}{\partial y} - n_y \xi w \frac{\partial v}{\partial z} - n_z \xi \frac{\partial w}{\partial t} \\ - n_z \xi u \frac{\partial w}{\partial x} - n_z \xi v \frac{\partial w}{\partial y} + \\ (\beta - n_z \xi w) \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (۱۷)$$

فقط معادله سازگاری اول به صورت دیفرانسیل کامل ظاهر می شود. برخلاف معادله سازگاری اول، بقیه معادلات، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خواهند بود. بنابراین، از فرض یک بعدی سازی موضعی، در این مرحله استفاده می شود. در این حالت فقط از مولفه عمود بر سطح استفاده می شود و دو مولفه مماس بر سطح در تعیین مشخصه های کنار گذاشته می شوند. با تکرار تمامی مراحل طی شده با فرضی که توضیح داده شد، معادلات زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{2}(-u_n \pm u_a) \frac{du_n}{dt} &= 0, \\ u_a &= \sqrt{u_n^2 + \beta} \quad (\text{compatibility equations}), \quad (۱۸) \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2}(-u_n \pm u_a) \quad (\text{characteristic lines}). \end{aligned}$$

در رابطه بالا u_n مولفه عمود بر سطح سلول می باشد (شکل ۲).



شکل (۱): تقاطع ابرمخروط ماخ مجازی چهار بعدی با فضای فیزیکی سه بعدی.

این شکل سه بعدی در جریان های تراکم پذیر به علت برابر بودن سرعت انتشار امواج صوتی در تمامی راستاها، کره است. اما در جریان های تراکم ناپذیر این مقطع شکل هندسی خاصی ندارد و با فن عددی و تعیین نقطه به نقطه ایجاد شده است. سرعت صوت مجازی در جریان های تراکم ناپذیر با تراکم پذیری مصنوعی، تابعی از ضریب تراکم پذیری کورین می باشد. با افزایش مقدار ضریب تراکم پذیری مصنوعی، شکل ۱ به کره نزدیک تر می شود. با جایگزینی اولین "n_t" به دست آمده در معادله (۹) معادلات زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0, \quad \sigma_2 = -\frac{n_y}{n_x} \sigma_3 - \frac{n_z}{n_x} \sigma_4, \\ \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 &= \text{arbitrary}. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

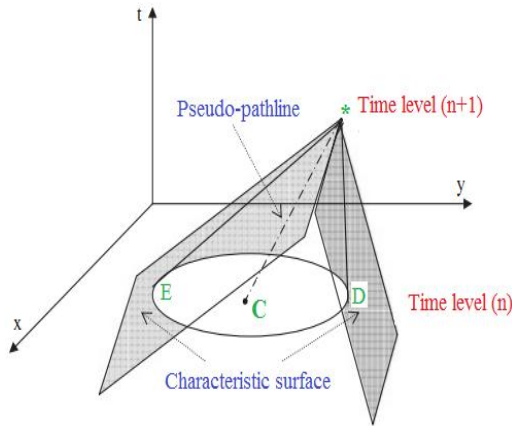
با انتخاب $\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = 1$ معادله سازگاری اول به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \rightarrow \\ \frac{dT}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

با انتخاب $\sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0$ و $\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 1, \sigma_5 = 0$ معادله

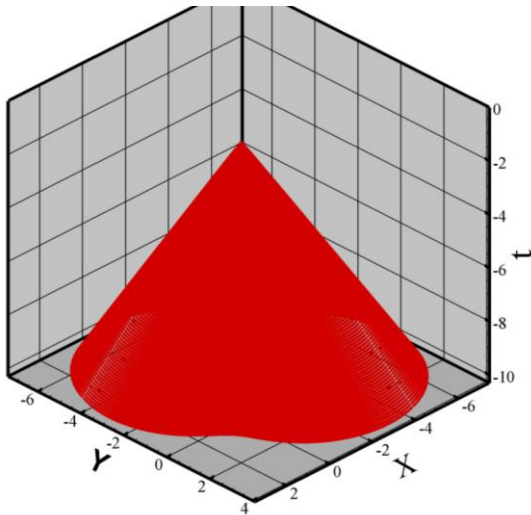
سازگاری به صورت رابطه (۱۶) به دست می آید:

معادله اول نشان‌دهنده خط مسیر مجازی و معادله دوم نشان دهنده سطوح مشخصه است. این خط و سطوح در شکل ۳ نشان داده شده است.



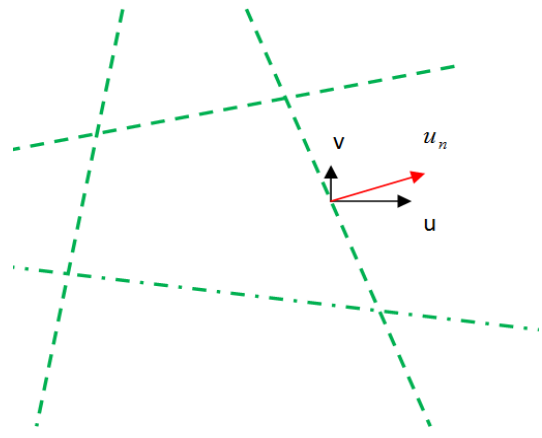
شکل (۳): خط مسیر مجازی و صفحات مشخصه و مخروط ماخ مجازی در جریان‌های تراکم‌ناپذیر با تراکم‌پذیری مصنوعی.

معادلات بالا حل تحلیلی ندارند، اما با حل عددی معادلات بالا، مخروط ماخ مجازی به دست می‌آید. این مخروط در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل (۴): مخروط ماخ مجازی به دست آمده توسط روش عددی.

تصویر مخروط سه‌بعدی تولید شده با صفحه فیزیکی (صفحه $t=0$) با تعریف $n_x = \cos(\theta)$ ، $n_y = \sin(\theta)$ و حل عددی به دست می‌آید. سطح مقطع به دست آمده در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل (۲): بردار سرعت عمود بر مرز سلول.

بعد از گسسته‌سازی روابط بالا روی مسیرهای مشخصه، دو معادله با دو مجهول فشار و سرعت وجود خواهد داشت که از روابط زیر به دست می‌آیند. دما هم با گسسته‌سازی اولین معادله سازگاری روی اولین خط مسیر مجازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(u^*)^{k+1} = \frac{1}{u_a} ((p_E)^k - (p_D)^k + \frac{1}{2}(u_n + u_a)(u_E)^k - \frac{1}{2}(u_n - u_a)(u_D)^k), \quad (19)$$

$$(p^*)^{k+1} = (p_E)^k - \frac{1}{2}(u_n + u_a)^*$$

$$((u^*)^{k+1} - (u_E)^k),$$

$$(T^*)^{k+1} = (T_C)^k.$$

نقاط "C, D, E" روی خطوط مشخصه هستند.

۳- روش پایه مشخصه دو بعدی

تمامی روابط به دست آمده در قسمت قبلی با حذف جهت z به حالت دوبعدی ساده می‌شوند. معادلات ساده شده به شرح زیر خواهند بود:

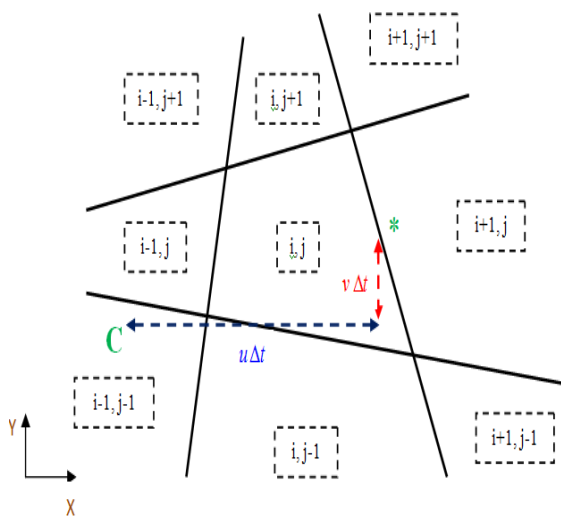
$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v \quad (\text{two times}),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-n_x}{2}^*,$$

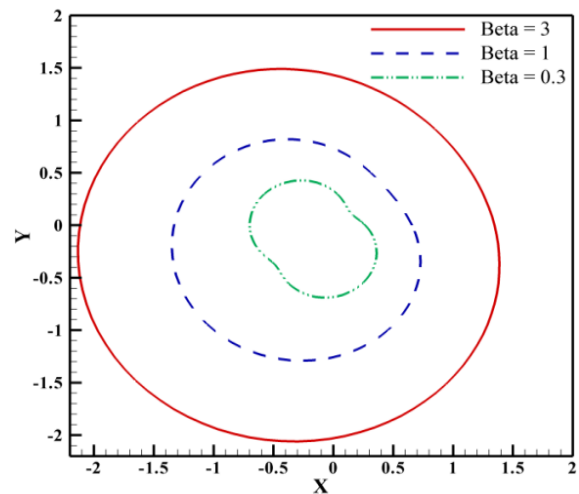
$$\left(-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta}\right), \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-n_y}{2}^*,$$

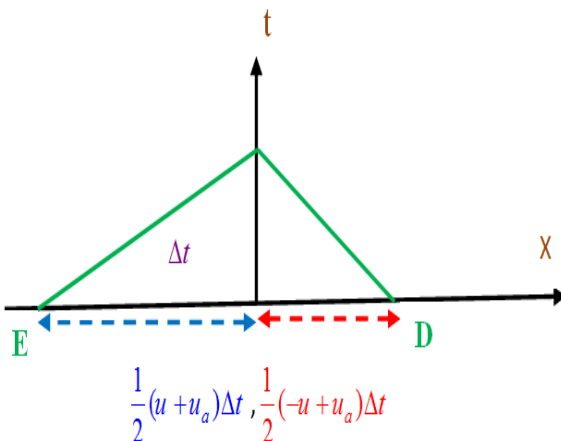
$$\left(-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta}\right).$$



شکل (۶): الگویی به دست آمده نقطه روی خط مشخصه اول برای محاسبه دما در مرز سلول.



شکل (۵): تقاطع مخروط ماخ مجازی سه بعدی با فضای فیزیکی دو بعدی در ضرایب تراکم پذیری مصنوعی مختلف.



شکل (۷): الگویی به دست آمدن نقاط روی خطوط مشخصه دوم و سوم برای محاسبه سرعت و فشار در مرز سلول.

۴- مقایسه روش پایه مشخصه و روش میانگین گیری

نتایج روش پایه مشخصه و میانگین گیری از چند منظر قابل مقایسه هستند. نتایج روش مرتبه اول پایه مشخصه نسبت به روش مرتبه دوم میانگین گیری در برخی از موارد دقت بیشتری دارد. اما در بیشتر موارد از دقت یکسانی برخوردار هستند [۹-۱۱]. همگرایی سریع تر روش پایه مشخصه نسبت به میانگین گیری در بیشتر موارد مشاهده می شود. در روش پایه مشخصه در مقایسه با میانگین گیری، از نقطه نظر ریاضی، محاسبات بیشتری انجام می گیرد که اعمال این روش را مخصوصاً در شبکه های جسم گرا پیچیده تر می کند. با وجود

برای به دست آوردن حل عددی های ذکر شده کدهای دیگری در نرم افزار متلب نوشته شد و شکل ۴ و ۵ نتیجه کدهای نوشته شده می باشد. در جریان های تراکم پذیر با توجه به ثابت بودن سرعت انتشار امواج در تمامی جهات سطح مقطع مخروط ماخ با صفحه فیزیکی دایره ای شکل است. اما در جریان های تراکم ناپذیر همراه با تراکم پذیری مصنوعی، به علت متفاوت بودن سرعت انتشار امواج مجازی در جهات مختلف این شکل دایره یا بیضی نیست. سرعت انتشار امواج در جهات مختلف تابعی از ضریب تراکم پذیری مصنوعی و زاویه است. با افزایش مقدار ضریب تراکم پذیری مصنوعی شکل سطح مقطع به دایره نزدیک می شود. بعد از یک بعدی سازی موضعی مثل قسمت قبلی (حالت سه بعدی) و گسسته سازی معادلات به دست آمده، نقاط "C, D, E" طبق رابطه (۲۱) به دست می آیند. در شکل های ۶ و ۷ الگوهای تعیین خطوط مشخصه نشان داده شده است. در این شکل ها نقاط "C, D, E" روی خطوط مشخصه قرار دارند و اطلاعات (سرعت، فشار، دما) ذخیره شده در این نقاط برای محاسبه جملات همرفت در روش پایه مشخصه، طبق روابط استخراج شده، استفاده می شود. این نقاط در شکل ۳ نیز در فضای سه بعدی نمایش داده شده بود.

$$\begin{aligned}
 x_D &= x^* - \frac{1}{2}(u_n - u_a)\Delta t, \\
 x_E &= x^* - \frac{1}{2}(u_n + u_a)\Delta t, \\
 x_C &= x^* - u\Delta t, \quad y_C = y^* - v\Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{۲۱}$$

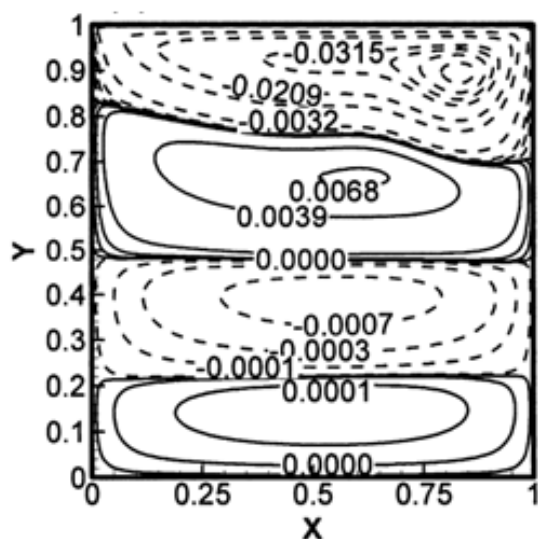
۵- تاثیر ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی و اعتبارسنجی

در این قسمت تاثیر ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی بررسی می‌شود. تاثیر این عامل روی تغییرات سطح مقطع مخروط ماخ مجازی در قسمت قبلی بررسی شد. نتایج نشان داد که با افزایش ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی سطح مقطع دایره‌ای شکل می‌شود. برای بررسی تاثیر ضریب تراکم‌پذیری روی دقت و سرعت همگرایی، کدهایی در نرم‌افزار فرترن نوشته شد که جریان داخل حفره را با طرح مشخصه‌های دوبعدی شبیه‌سازی کند. برای محاسبه مشتقات مرتبه دوم از سلول‌های ثانویه و برای گسسته‌سازی زمانی از رانگ- کوتای مرتبه ۵ همانند کارهای قبلی مولف [۹-۱۰] استفاده شده است. خطوط جریان به‌دست‌آمده از کد نوشته شده با خطوط جریان موجود در کار چنگ و لیو [۱۸] مقایسه شد. نتایج در شکل ۸ نشان داده شده است. نتایج به‌دست‌آمده با ضریب‌های تراکم‌پذیری مختلف هم‌خوانی مناسبی با نتایج چنگ و لیو دارد. کد نوشته شده قابلیت اعمال به جریان‌های همرفت طبیعی و اجباری و همچنین جریان‌های بدون انتقال گرما را دارد. مثلا در شبیه‌سازی حفره انجام‌شده، همرفت طبیعی ($\frac{Gr}{Re^2} \gg 1$) با $Re=316$, $Pr=0.7$, $Gr=10^6$ شبیه‌سازی شده است. تغییرات عدد ناسلت روی دیوار بالا و پایین در شکل ۹ و ۱۰ نشان داده شده است. در این شکل‌ها نتایج حاصل از کد در ضریب‌های مختلف تراکم‌پذیری با نتایج ایوانسو [۱۹] مقایسه شده است. نتایج تطابق خوبی با هم دارند و تغییرات ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی تاثیر زیادی روی دقت نتایج نداشته است. در شکل‌های ۹ و ۱۰ همرفت اجباری ($\frac{Gr}{Re^2} \ll 1$) با $Re=400$, $Pr=0.7$, $Gr=100$ شبیه‌سازی شده است. همچنین در مقایسه عدد ناسلت روی صفحه پایین و بالا، تغییرات عدد ناسلت روی صفحه بالا از چپ به راست نزولی است که علت آن تشکیل لایه مرزی و ضخیم‌تر شدن آن است. اما در صفحه پایین چنین الگوی منظمی وجود ندارد و عدد ناسلت در نقطه مشخصی بیشینه محلی دارد.

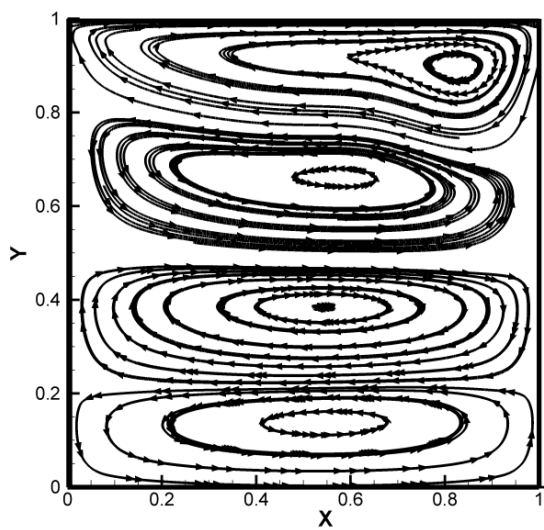
بیشتر بودن محاسبات در روش پایه مشخصه، با توجه به همگرایی سریع‌تر، در بیشتر موارد این روش از نظر زمانی هم زودتر همگرا می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله با کد نوشته شده در نرم‌افزار فرترن^۱ ۹۵ بوده است. برای مقایسه زمانی روش‌های مورد اشاره، از تابع "CPU_TIME" برای اندازه‌گیری زمان CPU استفاده شد. لازم به‌ذکر است که محاسبات در PC با مشخصات (Asus, core i7, CPU 2.25GHz and 4GB installed memory (RAM)) انجام شده است. نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۱ آورده شده است.

جدول (۱): مقایسه مدت زمان اجرا برای دو روش.

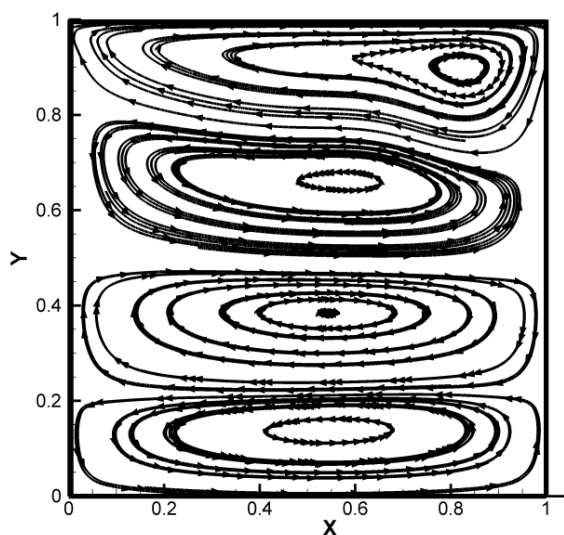
زمان در روش پایه مشخصه	زمان در روش میانگین گیری	شرایط شبیه‌سازی
۱۷/۴۶۶۵	۱۷/۸۳۰۹	جریان بین دو صفحه موازی با ($Re=100, Pr=0.71, Gr=0$)
۱۸/۲۲۳۱	۱۸/۵۶۴۱	جریان بین دو صفحه موازی با ($Re=400, Pr=0.71, Gr=0$)
۵۷/۸۱۴۰	۴۳/۷۸۹۵	حفره ($Re=3162, Pr=0.71, Gr=1E6$)
۵۸/۹۸۳۲	۳۹/۸۴۲۷	حفره ($Re=3162, Pr=0.71, Gr=1E4$)
۶۱/۲۵۴۳	۹۴/۴۲۳۴	جریان روی استوانه ($Re=400, Pr=0.71, Gr=1E6$)



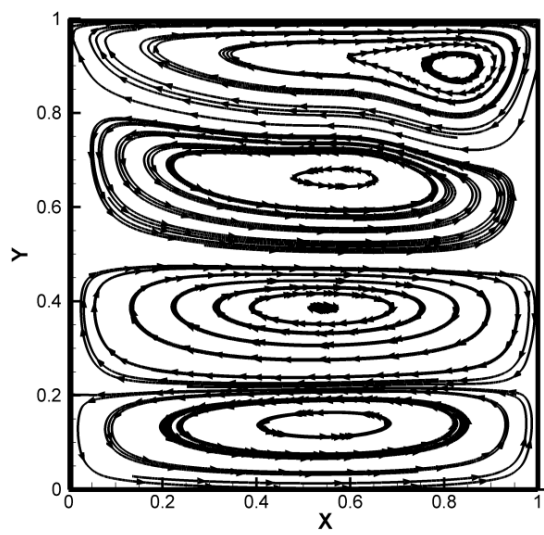
Cheng and Liu [۱۸]



"β"=5



"β"=25



"β"=125

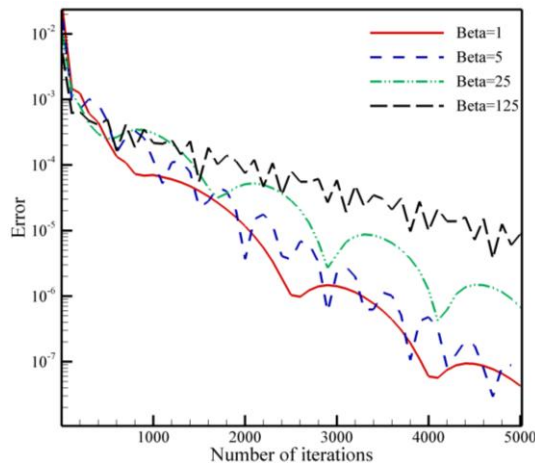
شکل (۸) خطوط جریان داخل حفره در ضرایب تراکم‌پذیری مختلف و مقایسه آن‌ها با نتایج چنگ و لیو [۱۸] در همرفت طبیعی با $Re=316, Pr=0.7$ and $Gr=1E6$.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که سرعت همگرایی تابع ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی است و مقدار بهینه آن در شرایط شبیه‌سازی شده، بین ۱ تا ۵ می‌باشد. در همرفت اجباری تاثیر تغییر ضریب تراکم‌پذیری روی سرعت همگرایی بیشتر از همرفت طبیعی است. همچنین در همرفت اجباری نوسانات همگرایی شدیدتر است در حالی که در جریان همرفت طبیعی نوسانات با افزایش ضریب تراکم‌پذیری بیشتر می‌شوند.

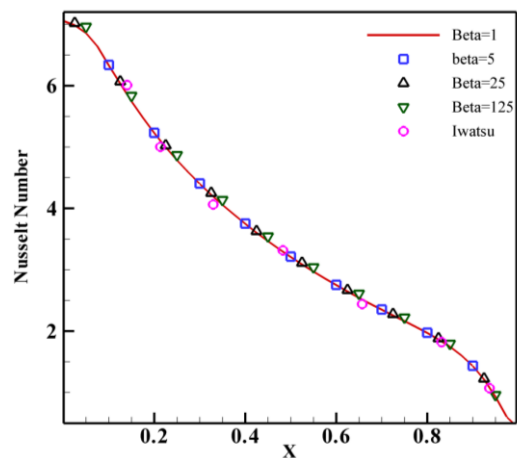
در مرحله نهایی کار، برای بررسی سرعت همگرایی، ابتدا خطا در کدهای نوشته شده به صورت زیر تعریف شد:

$$Error = \sqrt{\frac{\sum \sum (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n)^2}{N * M}} \quad (۲۲)$$

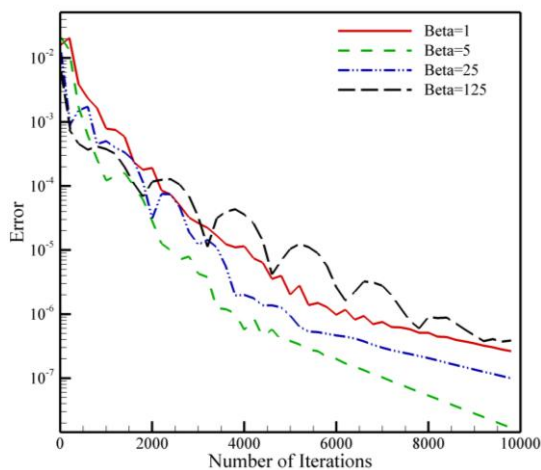
البته، خطا را می‌توان به صورت‌های دیگری نیز تعریف کرد. نمودار همگرایی برای ضرایب‌های تراکم‌پذیری مصنوعی مختلف از اجرای کدهای نوشته شده به دست آمدند و در



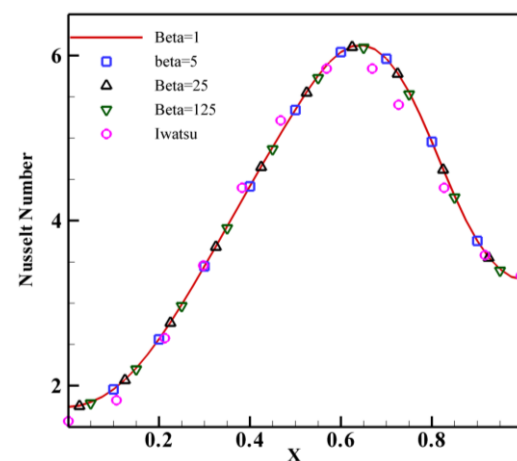
شکل (۱۱) تاریخچه همگرایی برای ضرایب تراکم‌پذیری مختلف برای همرفت اجباری در $Re=400, Pr=0.7, Gr=100$



شکل (۹): تغییرات عدد ناسلت روی دیوار بالای حفره برای ضرایب‌های تراکم‌پذیری مختلف و مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج ایواتسو [۱۹] در همرفت اجباری با $Re=400, Pr=0.7, Gr=100$



شکل (۱۲) تاریخچه همگرایی برای ضرایب تراکم‌پذیری مختلف برای همرفت طبیعی در $Re=316, Pr=0.7, Gr=1E6$



شکل (۱۰) تغییرات عدد ناسلت روی دیوار پایین حفره برای ضرایب‌های تراکم‌پذیری مختلف و مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج ایواتسو [۱۹] در همرفت اجباری با $Re=400, Pr=0.7, Gr=100$

شبکه‌های مختلف استقلال از شبکه بررسی شده است. این استقلال از شبکه در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. در جریان داخل حفره در همرفت طبیعی و اجباری در دو نوع شبکه بندی ۶۴ در ۶۴ سلول و ۱۲۸ در ۱۲۸ سلول شبیه‌سازی انجام شده است، همان‌طور که در شکل ۱۳ مشخص است، نتایج به‌دست‌آمده تطابق لازم را با هم دارند. سپس برای جریان روی استوانه ضریب فشار در دو شبکه‌بندی

۶- بررسی استقلال از شبکه

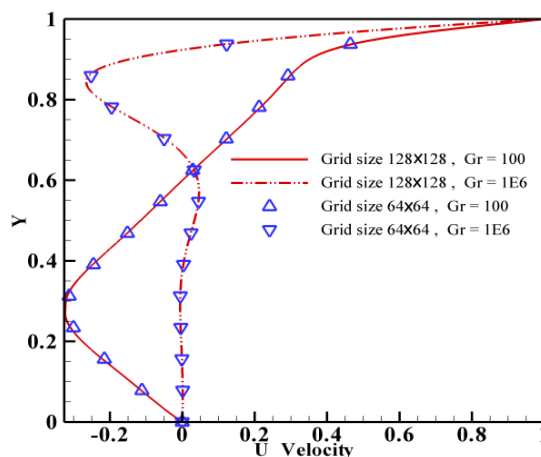
با روش پایه مشخصه جدید ارائه‌شده، جریان‌های زیادی شبیه‌سازی شده است. این جریان‌ها شامل همرفت طبیعی و اجباری در داخل حفره، بین دو صفحه موازی و روی استوانه بوده است. قسمتی از این نتایج در کارهای قبلی مؤلفین آورده شده است [۹-۱۱]. در این قسمت با شبیه‌سازی دو نوع جریان (جریان داخل حفره و جریان روی استوانه)، با

فیزیکی سه‌بعدی، کره نخواهد بود. همچنین بعد از ساده‌سازی روش پیشنهادی، به حالت دوبعدی مشخص شد که سطح مقطع مخروط ماخ مجازی سه‌بعدی با فضای فیزیکی دوبعدی برخلاف جریان‌های تراکم‌پذیر دایره نخواهد بود. شبیه‌سازی‌ها برای جریان‌های دوبعدی همراه با انتقال گرما انجام شد. نتایج شبیه‌سازی‌های جریان‌های همرفت طبیعی و اجباری نشان داد که نتایج روش پیشنهادی تطابق خوبی با نتایج موجود در ادبیات فن دارد. همچنین تاثیر تغییرات ضریب تراکم‌پذیری بررسی شد. نتایج نشان داد که تغییر ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی تاثیری روی دقت نتایج ندارد، اما باعث تغییر سرعت همگرایی می‌شود که این تغییر روند ثابتی ندارد. در موارد شبیه‌سازی شده بیشترین سرعت همگرایی برای ضریب‌های تراکم‌پذیری بین یک تا پنج اتفاق می‌افتد. همچنین نتایج نشان داد که تغییر ضریب تراکم‌پذیری سطح تقاطع ابرمخروط ماخ مجازی و مخروط ماخ مجازی با فضای فیزیکی را تغییر می‌دهد. با افزایش این ضریب، شکل‌های به‌دست‌آمده به کره و دایره نزدیک می‌شوند.

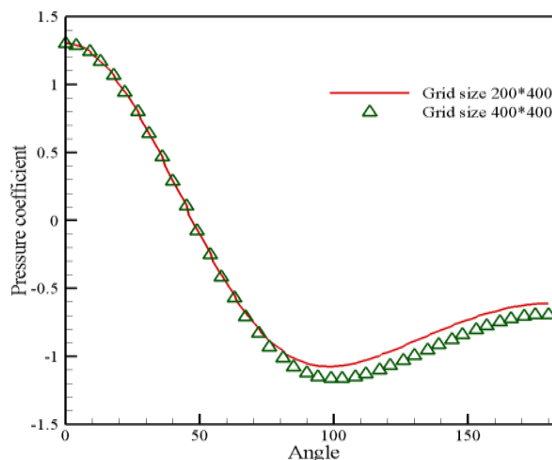
۷- مراجع

1. Chorin, A.J. "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", J. Comput. Phys. Vol. 135, No. 2, p.p. 118-125, 1997.
2. Tamamidis, P., Zhang, G., and Assanis, D.N. "Comparison of Pressure-Based and Artificial Compressibility Methods for Solving 3D Steady Incompressible Viscous Flows", J. Comput. Phys. Vol. 124, No. 1, p.p. 1-13, 1996.
3. Ohwada, T., Asinari, P., and Yabusaki, D. "Artificial Compressibility Method and Lattice Boltzmann Method: Similarities and Differences", CAMWA, Vol. 61, No. 12, p.p. 3461-3474, 2011.
4. Drikakis, D., Govatsos, P.A., and Papantonis, D.E. "A Characteristic-Based Method for Incompressible Flows", Int. J. Num. Methods Fluids, Vol. 19, p.p. 667-685, 1994.
5. Drikakis, D. "A Parallel Multiblock Characteristic-Based Method for Three-dimensional Incompressible Flows", Adv. Eng. Soft., Vol. 26, No. 2, p.p. 111-119, 1996.
6. Zhao, Y. and Zhang, B. "A High-Order Characteristics Upwind FV Method for Incompressible Flow And Heat Transfer Simulation on Unstructured Grids", Comput. Methods in Appl. Mech. Eng., Vol. 190, No's. 5-7, p.p. 733-756. 2000.
7. Tai, C.H. and Zhao, Y. "Parallel Unsteady Incompressible Viscous Flow Computations Using an Unstructured Multigrid Method", J. Comput. Phys., Vol. 192, No. 1, p.p. 277-311. 2003.

۲۰۰ در ۲۰۰ سلول و ۴۰۰ در ۴۰۰ سلول محاسبه شده است. نتایج به‌دست‌آمده از این دو نوع شبکه، برای بررسی استقلال از شبکه با هم مقایسه شده و در شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل (۱۳) بررسی استقلال از شبکه در جریان داخل حفره (تغییرات u روی خط $x=0.5$ در $Re=400$, $Pr=0.71$).



شکل (۱۴) بررسی استقلال جواب‌ها از شبکه در جریان روی استوانه (تغییرات ضریب فشار بر حسب زاویه در $Re=20$).

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش پایه مشخصه جدید برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر سه‌بعدی همراه با انتقال گرما معرفی شد. در این طرح جدید ابتدا خطوط مشخصه و معادلات سازگاری به‌دست آمدند و سپس به کمک روش مشخصه‌ها جملات همرفت در مرز سلول‌ها تعیین شدند. نتایج نشان داد که برخلاف جریان‌های تراکم‌پذیر سطح مقطع ابر ماخ چهاربعدی با فضای

14. Razavi, S.E., Zamzamian, K. and Farzadi, A. "Genuinely Multi-dimensional Characteristic-Based Scheme for Incompressible Flows", *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 8, p.p. 929-949, 2008.
15. Hashemi, M.Y. and Zamzamian, K. "A Multi-dimensional Characteristic-Based Method for Making Incompressible Flow Calculations on Unstructured Grids", *J. Comp. and Appl. Math. (IJCAM)*, Vol. 259, p.p. 752-759, 2014.
16. Doustdar, M.M and Yekani, M.K. "Numerical Study of Mixed Convection of Nano Fluid in a Lid-Driven Cavity Containing Hot Obstacles" *Aerospace Mechanics j.*, Vol. 12. 2015 (in persian).
17. Mahmoodi, M. and Ebrahimi, M. " Numerical Simulation of Counter-Flow Wet Cooling Tower and Water Losses Effect on Characteristic Performance " *Aerospace Mechanics j.*, Vol. 12, 2015 (in persian).
18. Cheng, T.S. and Liu, W.H. "Effect of Temperature Gradient Orientation on the Characteristics of Mixed Convection Flow in a Lid-Driven Square Cavity", *Comp. Fluids*, Vol. 39, No. 6, p.p. 965-978, 2010.
19. Iwatsu, R., Hyun, J.M., and Kuwahara, K. "Mixed Convection in a Driven Cavity with a Stable Vertical Temperature Gradient", *Int. Commun. Heat Mass*, Vol. 36, No. 6, p.p. 1601-1608, 1993.
8. Su, X., Zhao, Y., and Huang, X. "On the Characteristics-Based AcM for Incompressible Flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 227, No. 1, p.p. 1-11, 2007.
9. Adibi, T. and Razavi, S.E. "A New Characteristic Approach for Incompressible Thermo-Flow in Cartesian and Non-cartesian Grids", *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 79, p.p. 371-393, 2015.
10. Razavi, S.E. and Adibi, T. "A Novel Multidimensional Characteristic Modeling of Incompressible Convective Heat Transfer", *J. Applied Fluid Mechanics (JAFM)*, Vol. 9, No. 4, 2016.
11. Adibi, T. and Razavi, S.E. "A New-Characteristic Approach for Incompressible Thermo-Flow", *JSFM*, Vol. 5, p.p. 283-296, 1394 (in Persian).
12. Razavi, S.E. and Hanifi, M. "A Multi-dimensional Virtual Characteristic Scheme for Laminar And Turbulent Incompressible Flows", *J. Applied Fluid Mechanics (JAFM)*, Vol. 9, No. 4, p.p. 1579-1590, 2016.
13. Zamzamian, K. and Razavi, S.E. "Multi-dimensional Upwinding for Incompressible Flows Based on Characteristics", *J. Comput. Phys.*, Vol. 227, No. 19, p.p. 8699-8713, 2008.