

تخمین و تحلیل حساسیت ضرایب آیرودینامیکی یک وسیله پرنده از مدل سازی داده‌های آزمایش ایروبالستیک با حداقل مربعات غیرخطی و ماتریس فیشر

رضا بابایی مقدم^۱ محمد مهدی علیشاهی^۲ مجتبی میرزایی^۳
دانشکده مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک پژوهشکده علوم و فنون هوا-دریا
دانشگاه شیراز دانشگاه شیراز دانشگاه شیراز
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۰۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۰)

چکیده

با انجام آزمایش در آزمایشگاه‌های ایروبالستیک می‌توان ضرایب آیرودینامیکی یک جسم پرنده را با دقت بالا استخراج نمود. اما برای برنامه‌ریزی انجام آزمایش‌ها، تعیین تعداد و نوع متغیرهای اندازه‌گیری شده، چینش ایستگاه‌های اندازه‌گیری در هر آزمایش ضروری می‌باشد. بدین منظور می‌توان حساسیت مقادیر اندازه‌گیری شده نسبت به ضرایب آیرودینامیکی مورد نظر را محاسبه و بررسی نمود. در این مقاله با توجه به غیرخطی بودن معادلات حرکت شش درجه آزادی یک وسیله پرنده، با استفاده از روش حداقل مربعات و ماتریس اطلاعات فیشر از داده‌های شبیه‌ساز آزمایش ایروبالستیک، ضرایب آیرودینامیک استخراج شده و حساسیت هر یک از خروجی‌ها نسبت به تغییرات ضرایب آیرودینامیکی بررسی و ارائه شده است. به بیان دیگر این نتایج بیان می‌کند که در یک آزمایش ایروبالستیک، اگر داده‌های آزمایش نظیر سرعت و زاویه پیچ اندازه‌گیری شود دقت و حساسیت آن‌ها نسبت به هر کدام از ضرایب آیرودینامیکی و خطای ضرایب چه مقدار خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: آزمایش ایروبالستیک، شناسایی، حداقل مربعات، ضرایب آیرودینامیکی، حساسیت سنجی، ماتریس اطلاعات فیشر

Estimation and Sensitivity Analysis of Aerodynamic Coefficients of an Aircraft Using Nonlinear Least Square and Fisher Matrix Methods

R. Babaee Moghadam M. M. Alishahi M. Mirzai
Mech. Eng. Department Mech. Eng. Department Aero. Eng. Department
Shiraz University Shiraz University Shiraz University

(Received: 27/December/2020; Accepted: 11/July/2021)

ABSTRACT

The aerodynamic coefficients of any flying object can be estimated with high accuracy, by aero-ballistic tests, monitored in aerodynamic laboratories. For test-running management, it is necessary to determine the number and type of estimated variables and the station placement of each test. For this purpose, the sensitivity of variables under measurement, in relation to the associated aerodynamic coefficients must be calculated and surveyed. As the trajectory path is a nonlinear equation with six degrees of freedom, in this article we estimate the aerodynamic coefficients and sensitivity of each output to the changes of aerodynamic coefficients using the least square method and fisher data matrix. In other word, if the test data such as the speed and pitch angle are to be measured in an aero-ballistic test, the results of this research can specify their accuracy and sensitivity to each aerodynamic coefficient and the relevant coefficient errors.

Keywords: Aero-ballistic Test, Nonlinear Least Square, Aerodynamic Coefficients, Sensitivity Analysis, Fisher Matrix

۱- دانشجوی دوره دکتری: rbabayi@chmail.ir

۲- استاد مهندسی مکانیک (نویسنده پاسخگو): m.alishahi@shirazu.ac.ir

۳- استادیار هوا فضا: m.mirzayi@shirazu.ac.ir

فهرست علائم و اختصارات

۱- مقدمه

برای طراحی وسایل پرنده و پیش‌بینی عملکرد پروازی آن‌ها نیاز به دانستن نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در قالب ضرایب یا مشتقات آیرودینامیکی است. این ضرایب یا مشتقات را می‌توان از روش‌های تئوری (تحلیلی و عددی) یا آزمایش‌های تجربی به‌دست آورد که هر کدام مزیت‌ها و معایب خود را دارد. انجام آزمایش‌های ایروبالستیک یک روش تجربی برای به‌دست آوردن ضرایب و مشتقات آیرودینامیکی مدل مقیاس شده جسم پرنده است که معمولاً از دقت بالایی برخوردار بوده و از یک روش خاص برای حل دستگاه معادلات حرکت مدل استفاده می‌نماید.

معادلات حرکتی پرواز یک وسیله پرنده شامل ۶ معادله غیرخطی و همبسته معادلات نیرو و گشتاور است. در حالت عمومی، با داشتن نیروها و گشتاورهای وارده بر وسیله پرنده و معلوم بودن ضرایب آیرودینامیکی و ضرایب مشتقات پایداری، می‌توان با روش‌های حل معادلات عددی نظیر رانژ کوتا^۱، آن‌ها را حل کرد و داده‌های پروازی نظیر سرعت، زاویه پیچ و ... را به‌دست آورد.

اما در آزمایش‌های ایروبالستیک مسئله به این صورت است که با اندازه‌گیری نتایج پروازی حاصل از آزمایش، ضرایب آیرودینامیکی به‌عنوان پارامترهای مجهول تخمین زده شود. یکی از روش‌های حل، روش حداقل مربعات غیرخطی است که با استفاده از نتایج حل معادلات، می‌توان ضرایب معادلات غیرخطی را به‌دست آورد. در اینجا هدف این است که با استفاده از روش حداقل مربعات غیرخطی، از طریق داده‌های شبیه‌ساز آزمایش ایروبالستیک، ضرایب آیرودینامیکی تخمین زده شوند. برای انجام درست این‌گونه محاسبات و حداقل نمودن خطای حاصل لازم است که حساسیت هر یک از خروجی‌ها نسبت به ضرایب آیرودینامیکی در الگوریتم محاسباتی تخمین زده شده و مستحکم‌ترین رابطه مابین آن‌ها مشخص و نتیجتاً برنامه‌ریزی مناسب برای انجام آزمایش‌ها به عمل آید که این مورد هم در این مطالعه مورد توجه قرار می‌گیرد.

C_j	ضریب نیرو و یا گشتاور
C_l^B	ماتریس انتقال از دستگاه مختصات اینرسی به مختصات بدنی
D	بزرگ‌ترین قطر خارجی بدنه جسم
F_g^I	نیروی گرانشی وارد بر جسم در دستگاه مختصات اینرسی
F_T^B, F_A^B	نیروهای آیرودینامیکی و نیروی حاصل از موتور در دستگاه مختصات بدنی
I_z, I_y, I_x	گشتاورهای اینرسی لحظه‌ای جسم
I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}	گشتاورهای اینرسی حاصل ضرب لحظه‌ای جسم
L, M, N	گشتاورهای خارجی وارده بر وسیله
M_A^B, M_T^B	گشتاورهای آیرودینامیکی و گشتاورهای ناشی از موتور حول مرکز جرم نهائی
M_s	جرم لحظه‌ای جسم که با زمان تغییر
M_∞	عدد ماخ جریان آزاد
$p(\theta)$	تابع احتمال پارامتر θ
$p(\theta y)$	احتمال مشروط
Q	هد دینامیکی
S	سطح مقطع خارجی بدنه جسم
X, Y, Z	نیروهایی خارجی وارده بر وسیله x, y, z
X_{BC}	فاصله مرکز جرم لحظه‌ای جسم تا مرکز دستگاه مختصات بدنی
p, q, r	سرعت زاویه‌ای جسم
علائم یونانی	
w_x, w_y, w_z	سرعت زاویه‌ای جسم
v_{wb}	سرعت موشک نسبت به هوا
α	زاویه حمله
β	زاویه سمت
ρ	چگالی هوا
δ	زوایای سطوح کنترلی
δ_e	زاویه بالابر
δ_r	زاویه سکان
δ_a	زاویه شهرپر
φ, θ, ψ	زوایای اولر
γ	زاویه مسیر پرواز

¹ Runge Kutta

۲- تاریخچه

استفاده از آزمایش پرواز آزاد مدل توسط سامانه‌های پرتاب مدل به منظور تعیین مشخصات آیرودینامیکی یک پرتابه به دهه ۱۹۷۰ میلادی بر می‌گردد. چاپمن و کرک [۱] از نخستین کسانی هستند که روشی به منظور تخمین ضرایب آیرودینامیکی از داده‌های پرواز آزاد مدل ارائه کردند. در سال ۱۹۸۸ دوپویس [۲] از سامانه پرتاب مدل جهت تعیین ضرایب آیرودینامیکی C_{x0} ، C_{ma} و C_{lp} در اعداد ماخ بین ۱.۷ تا ۲.۵ استفاده کرد. وی با استفاده از سیستم سایه‌نگاری با ۱۴ ایستگاه تصویربرداری و ۴ ایستگاه شلیرن موقعیت پرتابه را محاسبه و سپس توسط روش‌های شناسایی ضرایب آیرودینامیکی پرتابه دارت مانند را محاسبه نمود.

در سال ۲۰۰۰ تام و همکاران [۳] طی تحقیقی پسای آیرودینامیکی هندسه‌های مختلف در عدد ماخ ۲ را به دست آوردند. به اعتراف آن‌ها آزمایش پرتاب مدل روش بسیار مناسبی به منظور محاسبه درگ با دقت بسیار بالا برای پرتابه‌های مافوق صوت است. براون و همکاران [۴] نیز در سال ۲۰۱۰ ضرایب غیرخطی و مشتقات استهلاکی یاو و پیچ را بین عددهای ماخ ۰/۷ تا ۱/۲۵ از طریق محاسبه مسیر پروازی با استفاده از ۱۶ ایستگاه سایه‌نگاری به دست آوردند. هم‌چنین آن‌ها علاوه بر تخمین ضرایب C_L ، C_D ، C_m ، C_{mq} ، C_n ، زوایای حمله و سمت را محاسبه کردند.

تاپر و همکارانش در سال ۲۰۰۷ [۵] امکان استفاده از تله‌متری را به منظور دریافت داده و در نهایت محاسبه خصوصیات آیرودینامیکی مدل یک جسم از طریق آزمایش آیروبالستیک بررسی نمودند. در سال ۲۰۱۲ وی و همکارانش [۶] با استفاده از ۲ عدد دوربین سرعت بالا، ۲ عدد سایه‌نگار و سرعت سنجی لیزر داپلر^۱ توانستند علاوه بر اندازه‌گیری وابسته به زمان پارامترهای سیال و مشاهده دقیق حرکات انتقالی و چرخشی، ضرایب آیرودینامیکی یک پرتابه را در محدوده اعداد ماخ ۳ تا ۴/۵ با استفاده از پردازش تصویر و روش برازش حداقل مربعات تخمین بزنند.

تویودا و همکارانش [۷ و ۸] نیز در سال‌های ۲۰۱۳ و ۲۰۱۵ فشار در نزدیکی پرتابه‌های مختلف را با استفاده از ۸

حس‌گر فشار در فواصل معین در اطراف مسیر ایده‌آل پروازی و در جریانات پروازی مختلف به دست آورده و با نتایج حاصل از حل عددی جریان مقایسه کرده‌اند.

در سال ۲۰۱۵ نیز در تحقیق انجام شده توسط ایواکوا و همکارانش [۹] سرعت پرتابه، شکل جریان، اثرات تغییر فشار اطراف پرتابه را به ترتیب با استفاده از یک جفت دیود لیزری-فوتو دیود، تصویر شلیرن و حس‌گرهای فشار محاسبه و با نتایج عددی حل جریان مقایسه نمودند. در سال ۲۰۱۹ نیز ابطی [۱۰] با توسعه الگوریتم شناسایی بازگشتی، ضرایب هیدروینامیکی حرکتی یک جسم زیرسطحی را تعیین و با استفاده از این ضرایب، کنترلر آن جسم را طراحی و بهینه نمود.

همان‌گونه که بیان شد اغلب تحقیقات ارائه شده برای بیان تجربیات و اطلاعات به دست آمده از آزمایش‌ها و آزمایشگاه‌های آیروبالستیکی موجود بوده است و هیچ‌کدام به مواردی که برای طراحی این‌گونه آزمایش‌ها و تعداد و چینش ایستگاه‌های دریافت اطلاعات بوده نپرداخته‌اند. از اینرو با توجه به آماده‌سازی آزمایشگاه آیروبالستیک دانشگاه شیراز و برنامه‌ریزی برای انجام آزمایش‌ها لازم است تا علاوه بر یافتن پاسخ به سوال‌های فوق‌الذکر به مواردی مانند میزان حساسیت مقادیر اندازه‌گیری شده به خروجی‌ها (ضرایب آیرودینامیکی) به نوع، ترکیب و تعداد اطلاعات دریافت شده در آزمایش‌ها پروازی توجه شود. لذا در این مقاله هدف‌گذاری بر این مینا قرار گرفت که با استفاده از داده‌های شبیه‌ساز آزمایش آیروبالستیک، ضرایب آیرودینامیکی و مشتقات پایداری از طریق روش کمترین مربعات تخمین زده شوند و علاوه بر آن، حساسیت اندازه‌گیری‌ها نسبت به ضرایب آیرودینامیکی با استفاده از ماتریس حساسیت و اطلاعات فیشر به‌عنوان دست‌آورد‌های این مطالعه بررسی و تحلیل شوند.

۳- معادلات و تئوری حل مساله

۳-۱- معادلات حرکت

با توجه به اینکه جسم پرنده، یک جسم صلب شش درجه آزادی است، از اینرو برای آن شش معادله دینامیکی وجود خواهد داشت [۱۱].

^۱ Laser doppler velocimetry (LDV)

چون دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی دوران می‌کند بنابراین رابطه مشتق زمانی بردارها در دستگاه غیرلخت بدنی به فرم معادلات (۴) تا (۶) قابل بیان است [۱۴].

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \vec{\omega} \times (\cdot) \quad (4)$$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{V}} + \vec{\omega} \times m\vec{V} \quad (5)$$

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} \quad (6)$$

نیروها و گشتاورهای وارده به پرتابه نیز به صورت روابط (۷) و (۸) نوشته می‌شوند.

$$\vec{F} = \vec{F}_{Aerodynamic} + \vec{F}_{gravity} \quad (7)$$

$$\vec{F}_{Aerodynamic} = QS [C_X \quad C_Y \quad C_Z]^T_{body}$$

$$\vec{F}_{gravity} = mg [-\sin(\theta) \quad \sin(\phi)\cos(\theta) \quad \cos(\phi)\cos(\theta)]^T_{body}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{Aerodynamic} \quad (8)$$

$$\vec{M}_{Aerodynamic} = QSd [C_l \quad C_m \quad C_n]^T_{body} + X_{bc} [0 \quad QSC_Z \quad -QSC_Y]^T$$

نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی پرتابه نیز به صورت رابطه (۹) می‌باشند:

$$(F_A^B)_x = QS \left[C_{x0} + C_{x\alpha^2} \alpha |\alpha| + C_{x\beta^2} \beta |\beta| + C_{x\delta_e} |\delta_e| + C_{x\delta_a} |\delta_a| + C_{x\delta_r} |\delta_r| \right]$$

$$(F_A^B)_y = QS \left[C_{y\beta} \beta + C_{y\delta_r} \delta_r + C_{yr} \frac{rD}{2v} \right]$$

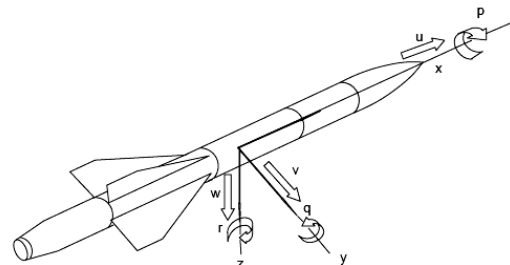
$$(F_A^B)_z = QS \left[C_{z\alpha} \alpha + C_{z\delta_e} \delta_e + C_{yq} \frac{qD}{2v} \right] \quad (9)$$

$$(M_A^B)_x = QSD \left[C_{L\delta_a} \delta_a + C_{Lp} \frac{pD}{2v} \right]$$

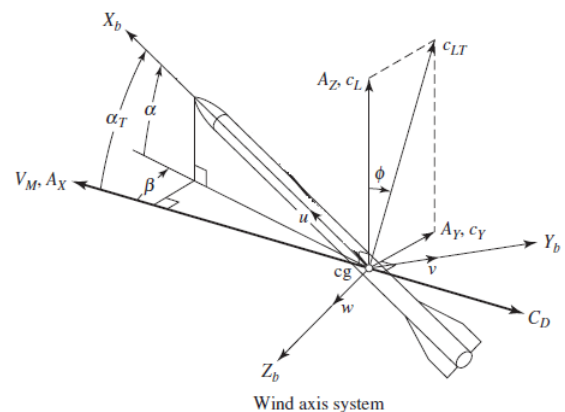
$$(M_A^B)_y = QSD \left[C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta_e} \delta_e + C_{Mq} \frac{qD}{2v} \right]$$

$$(M_A^B)_z = QSD \left[C_{N\beta} \beta + C_{N\delta_r} \delta_r + C_{Nr} \frac{rD}{2v} \right]$$

برای به دست آوردن معادلات حرکت لازم است دستگاه مختصات چسبیده به بدنه (مختصات بدنی) تعریف شود. در این دستگاه محور X در راستای محور طولی، و محورهای Y و Z عمود بر آن هستند [۱۲].



شکل (۱): شماتیک طرز قرار گرفتن محورهای مختصات بدنی



شکل (۲): تعاریف بعضی از ضرایب آیرودینامیکی [۳]

معادلات حرکتی جسم همبسته و غیرخطی هستند. سه معادله از این شش معادله مربوط به معادلات نیرویی و سه معادله دیگر مربوط به معادلات گشتاور هستند. این معادلات در دستگاه مختصات لخت^۱ به صورت معادله (۱) بیان می‌شوند [۱۲ و ۱۳]:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \quad (1)$$

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) \quad (2)$$

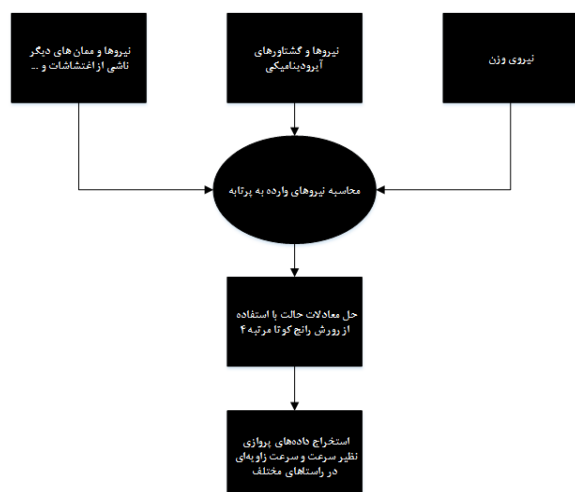
$$\vec{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$$

$$\vec{M} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (3)$$

$$\vec{V} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$$

$$\vec{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

¹ Inertial Coordinate



شکل (۳): فلوجارت محاسبات در شبیه‌ساز آزمایش ایروبالستیک

۳-۲- روش حداقل مربعات خطی

جهت شناسایی ضرایب آیرودینامیکی و مشتقات پایداری وسیله پرنده نیاز است که این مجهولات از معادلات حرکت به دست آیند. قانون تقریب ضرایب باید به گونه‌ای باشد که این تقریب‌ها با خطای قابل قبولی به مقادیر حقیقی ضرایب نزدیک شوند. برای این منظور روش‌های متعددی وجود دارد نظیر روش گرادیان و حداقل مربعات خطا و ... معمولاً قانون تقریب از کمینه کردن یک تابع هدف به دست می‌آید. تابع هدف در روش حداقل مربعات به صورت رابطه (۱۳) است.

$$J = \frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{2} (y - \hat{y})^2 \quad (13)$$

تابع هدف در روش حداقل مربعات به شکل معادله (۱۴) خواهد بود.

$$J = \int_0^t e^2 dt = \int_0^t (y - \hat{y})^2 dt$$

(In continues system)

$$J = \sum_{k=1}^{N_i} e_k^2 = \sum_{k=1}^{N_i} (y_k - \hat{y}_k)^2 \quad (14)$$

(In discretized system)

مستقل از خطی یا غیرخطی بودن سیستم، اگر خروجی نسبت به این متغیرهای مجهول خطی باشد، کافی است

در رابطه (۹)، Q هد دینامیکی، ρ چگالی هوا و V اندازه بردار V_{wb} است. S و D نیز به ترتیب سطح و طول مرجع که می‌توانند سطح مقطع و بزرگ‌ترین قطر خارجی بدنه جسم باشند.

با استفاده از معادلات (۵) تا (۸) و با فرض با توجه به تقارن موجود در جسم مورد مطالعه نیز داریم:

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

بنابراین خواهیم داشت [۱۵ و ۱۶]:

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_z V_y - \omega_y V_z \\ \omega_x V_z - \omega_z V_x \\ \omega_y V_x - \omega_x V_y \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \end{pmatrix} + \frac{QS}{m} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} (QSdC_l - \omega_y \omega_z (I_z - I_y)) \\ \frac{1}{I_y} (QSdC_m - \omega_x \omega_z (I_x - I_z)) \\ \frac{1}{I_z} (QSdC_n - \omega_x \omega_y (I_y - I_x)) \end{pmatrix} \quad (11)$$

هم‌چنین مؤلفه‌های سرعت جسم و زوایای α و β از روابط (۱۲) به دست می‌آیند.

$$v_x = V \cos \alpha \cos \beta$$

$$v_y = V \sin \beta$$

$$v_z = V \sin \alpha \cos \beta$$

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (12)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{v_z}{v_x} \right)$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{v_y}{V} \right)$$

فلوجارت محاسبات در شبیه‌ساز آزمایش ایروبالستیک به صورت شکل (۳) خواهد بود:

در مسئله شناسایی ضرایب در واقع هدف کمینه کردن تابع هدف زیر است. این روش تخمین پارامتر را روش حداقل مربعات غیرخطی^۲ می‌گویند. همچنین باید توجه کرد روش‌ها معمولاً محلی است و در یک همسایگی محدود از پارامترها و تغییرات قابل استناد است.

$$J = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{Ni} \sum_{j=1}^{n_y} e_{i,j}^T(t_k, \theta) \cdot e_{i,j}(t_k, \theta) \quad (17)$$

$$e_{i,j}(t_k, p) = y_{i,j}(t_k) - \hat{y}_{i,j}(t_k, \theta)$$

در این رابطه، n_y تعداد خروجی‌های اندازه‌گیری شده، Ni تعداد گام‌های زمانی، n_s تعداد کل آزمایش‌ها هستند. برای راحتی بیشتر تابع هدف را به صورت برداری به فرم زیر نیز می‌توان نوشت:

$$J = E^T \cdot E \quad (18)$$

$$E = E_{(n_y \cdot Ni \cdot n_s) \times 1}$$

در واقع E یک بردار ستونی شامل خطای تمام خروجی‌ها، برای تمام زمان‌ها و تمام آزمایش‌ها است؛ یعنی E یک بردار ستونی با $n_y \cdot Ni \cdot n_s$ سطر است.

شرط کمینه شدن این تابع به شکل زیر قابل بیان است:

$$\nabla J = 0 \quad (19)$$

$\nabla^2 J$ is positive definite

∇J و $\nabla^2 J$ نیز طبق روابط (۲۰) قابل محاسبه خواهند بود.

$$\nabla J = \text{Jacobian}(E)^T \cdot E$$

$$\nabla^2 J = \text{Jacobian}(E)^T \cdot \text{Jacobian}(E) + \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{Ni} \sum_{j=1}^{n_y} e_{i,j}(t_k, \theta) \cdot \nabla^2 e_{i,j}(t_k, \theta)$$

برای کمینه کردن تابع هدف باید از روش‌های بهینه‌سازی استفاده کرد. روش‌های متعددی برای این منظور توسعه یافته‌اند. از جمله این موارد می‌توان به روش نیوتن^۳، روش گauss-نیوتن^۴، روش دمپ شده گauss-نیوتن^۵، روش لوبنبرگ-مارکرت^۶ و دیگر روش‌ها اشاره کرد. در ادامه جهت

برای کمینه کردن تابع هدف از تابع نسبت به θ یعنی نسبت به ضرایبی که باید تخمین زده شوند، مشتق گرفت و برابر صفر قرار داد. با این روش و کمی محاسبات ریاضی، می‌توان قانون تقریب پارامترها را به دست آورد.

اما در حالتی که سیستم نسبت به این پارامترهای مجهول غیرخطی است، لزوماً به راحتی نمی‌توان قانون تقریب پارامترها را برای کمینه کردن تابع هدف به صورت تحلیلی به دست آورد. برای این منظور باید از روش‌های بهینه‌سازی بهره جست؛ یعنی قانونی یافت که تابع هدف کمینه شود.

در سیستم گسسته، روش شناسایی به صورت زیر خواهد بود. در روش گرادیان می‌توان قانون تقریب زیر را برای سیستم به دست آورد.

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \frac{\varphi(k)e(k)}{c + \varphi^T(k)\varphi(k)} ; c > 0 \quad (15)$$

یا در روش حداقل مربعات خواهیم داشت:

$$J = \sum_{k=1}^{Ni} e_k^2 = \sum_{k=1}^{Ni} (y_k - \hat{y}_k)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{k=1}^{Ni} (y_k - y_k)^2 =$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{k=1}^{Ni} (y_k^T - \varphi^T \theta) (y_k - \varphi^T \theta) = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{Ni} (\varphi_k \varphi_k^T \theta - \varphi_k y_k) = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{[\varphi_1 \ \dots \ \varphi_{Ni}]^T}_{\varphi_N^T} \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_{Ni}^T \end{bmatrix} \theta = \quad (16)$$

$$\underbrace{[\varphi_1 \ \dots \ \varphi_{Ni}]^T}_{\varphi_N^T} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{Ni} \end{bmatrix}_Y$$

$$\rightarrow \theta = (\varphi_N^T \varphi_N)^{-1} \varphi_N^T Y$$

در واقع در این روش برای تقریب پارامترها از رابطه‌ای موسوم به الگوریتم بچ^۱ استفاده می‌کنیم.

² Nonlinear least squares

³ Newton's method

⁴ The Gauss-Newton method

⁵ Damped Gauss-Newton

⁶ The Levenberg-Marquardt method

¹ Batch Algorithm

با مقایسه ستون‌ها یا نرم آن‌ها با یکدیگر می‌توان بررسی کرد که حساسیت خروجی مدنظر نسبت به کدام پارامتر بیشتر و نسبت به کدام پارامتر کمتر است.

ماتریس اطلاعات فیشر به فرم رابطه (۲۵) تعریف می‌شود.

$$F = \tilde{S}_y(p^*)^T \tilde{S}_y(p^*) \quad (25)$$

اولین شرط شناساپذیر بودن این است که خروجی نسبت به پارامتر مورد نظر به اندازه کافی حساسیت داشته باشد. برای این منظور رابطه (۲۶) تعریف می‌شود.

$$\delta^{msqr} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left| \tilde{s}_{y/p_i} \right|_2 \quad (26)$$

هرچه مقدار تابع بالا برای یک پارامتر بیشتر باشد حساسیت نیز نسبت به آن بیشتر است.

برای بررسی شرط دوم نیز از عدد کاندیشن ماتریس اطلاعات فیشر یا ماتریس حساسیت استفاده می‌کنیم. شاخص هم‌خطی ماتریس حساسیت را به فرم رابطه (۲۷) تعریف می‌شود.

$$\gamma_K = \text{cond}(\tilde{S}_y(p_K)) \quad (27)$$

منظور از p_K تمام زیرمجموعه‌های پارامترهای مورد نظر است. برای مثال اگر هدف تحلیل حساسیت y_1 نسبت به p_3 و p_2, p_1 باشد. باید γ_K را برای تک تک این پارامترها، دوتا از آن‌ها و همه آن‌ها بررسی کرد.

به‌عنوان یک تقریب می‌توان از حدود زیر برای شرط دوم شناساپذیری استفاده کرد [۱۹]:

$$\begin{cases} 5 \leq \gamma_K < 10 & : \text{low collinearity} \\ 30 \leq \gamma_K \leq 100 & : \text{moderate collinearity} \\ \gamma_K > 100 & : \text{strong colinearity} \end{cases} \quad (28)$$

۴- نتایج

۴-۱- داده‌ها، شرایط اولیه و مشخصات پروازی

داده‌های پروازی مورد نیاز جهت تخمین ضرایب به‌دلیل در دسترس نبودن نتایج آزمایشگاه ایروبالستیک، از خروجی یک شبیه‌ساز به‌عنوان ورودی برنامه تخمین در نظر گرفته شده است. هم‌چنین شرایط اولیه و مشخصات وسیله پرنده

رعیت اختصار تنها روش نیوتن به‌عنوان یک نمونه ارائه شده و دیگر روش‌ها در مراجع کلاسیک توضیح داده شده‌اند.

۳-۳- روش نیوتن

در روش نیوتن، قانون تقریب از رابطه (۲۱) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \theta_{q+1} &= \theta_q - (\nabla^2 J_q)^{-1} \nabla J_q \\ &= \theta_q - \left(\text{Jacobian}(E)_q^T \cdot \text{Jacobian}(E)_q + S_q \right)^{-1} \nabla J_q \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{where: } S_q = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{n_y} e_{i,j} (t_k, \theta_q) \cdot \nabla^2 e_{i,j} (t_k, \theta_q)$$

در این رابطه q شماره تکرار الگوریتم است و الگوریتم باید تا جایی تکرار شود که تغییرات θ به‌عنوان تقریب پارامترهای مجهول به حداقل مقدار قابل قبول برسد. هم‌چنین باید توجه کرد که مشتق‌ها عددی محاسبه می‌شوند.

۳-۴- تحلیل حساسیت

تابع حساسیت خروجی y به پارامتر p_l در همسایگی یک p_l به‌صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود [۱۳، ۱۷ و ۱۸].

$$s_{y/p_l} (t_k, p^*) = \frac{\partial y(t_k, p)}{\partial p_l} \Big|_{p^*} \quad (22)$$

فرم نرمال تابع حساسیت به فرم رابطه (۲۳) قابل بیان است.

$$\tilde{s}_{y/p_l} (t_k, p^*) = s_{y/p_l} \frac{p_l^*}{|y(t_k, p^*)|} \quad (23)$$

برای بررسی حساسیت نسبت به چندین پارامتر، ماتریس حساسیت به فرم رابطه (۲۴) تعریف می‌شود.

$$\tilde{S}_y(p^*) = \begin{bmatrix} \tilde{s}_{y/p_1}(t_1, p^*) & \tilde{s}_{y/p_2}(t_1, p^*) & \dots & \tilde{s}_{y/p_{np}}(t_1, p^*) \\ \tilde{s}_{y/p_1}(t_2, p^*) & \tilde{s}_{y/p_2}(t_2, p^*) & \dots & \tilde{s}_{y/p_{np}}(t_2, p^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{s}_{y/p_1}(t_N, p^*) & \tilde{s}_{y/p_2}(t_N, p^*) & \dots & \tilde{s}_{y/p_{np}}(t_N, p^*) \end{bmatrix} \quad (24)$$

با در نظر گرفتن هر یک از این ضرایب به عنوان مجهول، مقدار نامی آن نادیده گرفته می شود و از مقادیر نامی دیگر ضرایب جهت محاسبات استفاده می شود. همچنین، مدت زمان شبیه سازی ۰/۵ ثانیه (به اندازه پرواز یک پرتابه در آزمایش ایروبالستیک) در نظر گرفته شده است. جهت داده برداری نیز در دو حالت مختلف ۵ ایستگاه و ۱۰ ایستگاه در نظر گرفته می شود که با توجه به زمان داده برداری، فرکانس داده برداری به ترتیب ۱۰ هرتز و ۲۰ هرتز تعیین می شود.

۲-۴- شناسایی و تحلیل حساسیت سرعت با ضریب C_{x0}

ابتدا حالتی که C_{x0} به عنوان پارامتر شناسایی و تنها سرعت به عنوان پارامتر اندازه گیری شده است، بررسی می شود. محدوده و حدس اولیه تخمین ضریب به صورت جدول ۳ در نظر گرفته شده است.

جدول (۳): محدوده تعیین شده و تخمین اولیه شناسایی

ضریب C_{x0} با اندازه گیری سرعت

ضریب	حد بالا	حد پایین	تخمین اولیه
C_{x0}	۰	-۱	۰

توضیح این که حد بالا و حد پایین محدوده ای است که نرم افزار تخمین مجبور به رعایت آن است. نتایج مربوطه در جدول ۳ قابل مشاهده است.

جدول (۴): شناسایی ضریب C_{x0} با استفاده از سرعت

پارامتر	حدس اولیه	مقدار واقعی	تخمین ۱ (f=10Hz)	تخمین ۲ (f=20Hz)
C_{x0}	۰	-۰/۳	-۰/۳۰۰۰۱	-۰/۳۰۰۰۰

همان طور که مشاهده می شود، ضریب C_{x0} با اندازه گیری سرعت با دقت خوبی قابل شناسایی است.

در این حالت بردار حساسیت نرمال $\tilde{S}_y(p^*)$ در فرکانس ۱۰ هرتز برابر خواهد بود با:

$$\tilde{S}_y(p^*) = \tilde{S}_y(C_{x0}) = \begin{pmatrix} -0.0343 \\ -0.0664 \\ -0.0964 \\ -0.1246 \\ -0.1510 \end{pmatrix}$$

همانند شرایط اولیه و مشخصات وسیله پرنده در یک آزمایش ایروبالستیک در نظر گرفته می شوند. داده های مربوطه در جدول ۱ قابل مشاهده می باشد.

جدول (۱): شرایط و مشخصات پروازی

پارامتر	مقدار	واحد
جرم	۰/۱۲۳۶	کیلوگرم
ممان اینرسی I_x	$۹/۶۰۴۵ * ۱۰^{-۶}$	$kg.m^2$
ممان اینرسی I_y	$۷/۰۲۰۲ * ۱۰^{-۴}$	$kg.m^2$
ممان اینرسی I_z	$۷/۰۲۰۲ * ۱۰^{-۴}$	$kg.m^2$
قطر	۰/۰۲۱۸	متر
زاویه بالک	۰	درجه
چگالی هوا	۰/۹۵۳۹	kg/m^3
سرعت صوت	۳۴۸/۹۲	m/s
شتاب جاذبه زمین	۹/۸۷۵	m/s^2
زاویه Phi	۳	درجه
زاویه Theta	۷/۱۶	درجه
زاویه Psi	۰	درجه
سرعت اولیه	۶۸۶/۲۲۱	m/s
زاویه حمله اولیه	۵/۰۸۸	درجه

در تقریب پارامترها به روش حداقل مربعات، چنانچه تمامی ضرایب آیرودینامیکی موجود در معادلات مجهول باشند، زمان حل معادلات بسیار طولانی خواهد بود و ممکن است به جواب مطلوب نرسد. اما اگر تعدادی از ضرایب معلوم باشند، زمان حل کاهش و دقت حل مساله بالاتر خواهد رفت. ضرایبی که در تقریب پارامترها معلوم باشند، به عنوان ضرایب نامی نام گذاری می شوند. مقادیر نامی در نظر گرفته شده برای ضرایب در این آزمایش در جدول ۲ در نظر گرفته شده است.

جدول (۲): ضرایب نامی

پارامتر	مقدار	واحد
C_{x0}	-۰/۳	-
C_{xa}	-۰/۰۰۰۵	1/rad
C_{za}	-۰/۱	1/rad
C_{zq}	-۱/۵	s/rad
C_{lp}	-۰/۱	s/rad
C_{ma}	۰/۳۱۵۰	1/rad
C_{mq}	-۷	s/rad
C_{ldel}	۱۰	1/rad

نتایج مربوطه در جدول ۷ قابل مشاهده می‌باشد.

جدول (۷): شناسایی ضرایب C_{x0} و $C_{x\alpha}$ با داده‌های سرعت

پارامتر	حدس اولیه	مقدار واقعی	تخمین ۱ (f=10Hz)	تخمین ۲ (f=20Hz)
C_{x0}	۰	-۰/۳	-۰/۳۰۰۱	-۰/۳۰۰۰
$C_{x\alpha}$	۰	-۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۵

در این حالت نیز ضرایب C_{x0} و $C_{x\alpha}$ با اندازه‌گیری سرعت با دقت بالا تخمین زده شده‌اند.

در این حالت بردار حساسیت نرمال در فرکانس ۱۰ هرتز برابر خواهد بود با:

$$\tilde{S}_y(p^*) = \tilde{S}_y(C_{x0}, C_{x\alpha}) = \begin{pmatrix} -0.0343 & -0.0001 \\ -0.0664 & -0.0001 \\ -0.0964 & -0.0001 \\ -0.1246 & -0.0001 \\ -0.1511 & -0.0001 \end{pmatrix}$$

که این موضوع نشان می‌دهد خروجی سرعت در زمان‌های مختلف به C_{x0} و $C_{x\alpha}$ حساسیت دارد. همچنین $\delta^{msqr} = (0.1032 \ 0.0001)$ خواهد بود که اولین شرط شناساپذیر بودن این است که این مقدار مخالف صفر باشد. طبیعی است هرچه مقدار تابع بالا برای یک پارامتر بیشتر باشد حساسیت نیز نسبت به آن بیشتر است بنابراین حساسیت نسبت به C_{x0} بیشتر از $C_{x\alpha}$ است. ماتریس اطلاعات فیشر نیز رنگ کامل خواهد بود (شرط لازم شناساپذیر بودن) و همچنین شاخص هم خطی یا عدد کاندیشن $\gamma_K = 2508$ خواهد بود. طبق شرط دوم شناساپذیر بودن در حالت کلی هرچه این ضریب کمتر باشد هم خطی بودن کمتر خواهد بود. بنابراین وضعیت هم خطی قوی برای این مساله باعث می‌شود که نتوان تقریب خوبی به‌ویژه برای دومین ضریب در صورت وجود خطا در اندازه‌گیری‌ها به‌دست آورد.

جدول ۸، شاخص‌های مطرح‌شده برای خروجی سرعت (۷) و ضرایب C_{x0} و $C_{x\alpha}$ را نشان می‌دهد. طبق این جدول شرط اول و دوم شناساپذیر بودن برای هر دو فرکانس برقرار است. طبق جدول ۸، هرچه فرکانس بیشتر باشد یا به

این موضوع نشان می‌دهد خروجی (۷) در زمان‌های مختلف به C_{x0} حساسیت دارد. همچنین، $\delta^{msqr} = 0.1032$ خواهد بود که اولین شرط شناساپذیر بودن این است که این مقدار مخالف صفر باشد. طبیعی است هرچه مقدار تابع بالا برای یک پارامتر بیشتر باشد حساسیت نیز نسبت به آن بیشتر است. چون تنها حساسیت نسبت به یک پارامتر در نظر گرفته‌شده است ماتریس اطلاعات فیشر رنگ کامل خواهد بود (شرط لازم شناساپذیر بودن) و همچنین شاخص هم خطی یا عدد کاندیشن $\gamma_K = 1$ که کمینه مقدار این شاخص خواهد بود (طبق شرط دوم شناساپذیر بودن در حالت کلی هرچه این ضریب کمتر باشد هم خطی بودن کمتر خواهد بود).

جدول ۵ شاخص‌های مطرح‌شده برای خروجی سرعت (۷) و ضریب C_{x0} را نشان می‌دهد. طبق این جدول شرط اول و دوم شناساپذیر بودن برای هر دو فرکانس برقرار است.

جدول (۵): حساسیت سرعت نسبت به C_{x0}

پارامتر	f=10Hz	f=20Hz
δ^{msqr}	۰/۱۰۳۲	۰/۰۹۷۰
γ_K	۱	۱
$rank(F)$	۱	۱
$cond(F)$	۱	۱

۳-۴- شناسایی و تحلیل حساسیت خروجی سرعت V به ضرایب C_{x0} و $C_{x\alpha}$

در این حالت C_{x0} و $C_{x\alpha}$ به‌عنوان پارامترهای شناسایی و سرعت به‌عنوان پارامتر اندازه‌گیری شده، بررسی می‌شود. حد و حدس اولیه تخمین ضریب به‌صورت جدول ۶ در نظر گرفته شده است.

جدول (۶): محدوده تعیین‌شده و تخمین اولیه شناسایی

ضرایب C_x و $C_{x\alpha}$ با اندازه‌گیری سرعت

ضریب	تخمین اولیه	حد پایین	حد بالا
C_{x0}	۰	-۱	۰
$C_{x\alpha}$	۰	-۱	۰

۴-۵- شناسایی و تحلیل حساسیت خروجی سرعت

V به ضرایب C_{zq} و C_{za} ، C_{xa} ، C_{x0}

در این حالت، پارامترهای شناسایی ضرایب C_{zq} ، C_{xa} ، C_{x0} و C_{zq} و پارامتر اندازه‌گیری شده سرعت می‌باشد. حد و حدس اولیه تخمین ضریب به صورت جدول ۹ در نظر گرفته شده است.

جدول (۹): محدوده تعیین شده و تخمین اولیه شناسایی

ضرایب C_x ، C_{xa} ، C_{za} و C_{zq} با اندازه‌گیری سرعت

ضریب	تخمین اولیه	حد پایین	حد بالا
C_x	۰	-۱	۰
C_{xa}	۰	-۱	۰
C_{za}	۰	-۱	۰
C_{zq}	۰	-۵	۰

نتایج مربوطه در جدول ۱۰ قابل مشاهده است.

جدول (۱۰): شناسایی ضرایب C_{zq} و C_{za} ، C_{xa} ، C_{x0} با

سرعت

پارامتر	مقدار واقعی	حدس اولیه	تخمین ۱ ($f=10\text{Hz}$)	تخمین ۲ ($f=20\text{Hz}$)
C_{x0}	-۰/۳	۰	-۰/۳۰۰۰۱	-۰/۳۰۰۰
C_{xa}	-۰/۰۰۰۵	۰	-۰/۰۰۰۵۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۵۰۰۵۴
C_{za}	-۰/۱	۰	-۰/۰۹۹۴۰۶	-۰/۰۹۹۹۲۲
C_{zq}	-۱/۵	۰	-۰/۰۴۳۹۷۵	-۱/۳۴۸۹

همان‌طور که در جدول ۱۰ مشاهده می‌شود، فرکانس اندازه‌گیری ۲۰ هرتز منجر به نتایج بسیار دقیقی شده است حال آنکه فرکانس ۱۰ هرتز از دقت شناسایی کاسته و به‌خصوص در تخمین C_{zq} دچار خطای بسیار زیادی شده است.

در نمودارهای شکل‌های ۴ و ۵، داده‌های پروازی ایروبالستیک و نتایج حاصل از شبیه‌سازی با ضرایب تخمین زده شده و ضرایب نامی نمایش داده شده است.

عبارتی ایستگاه‌ها بیشتر شوند مقدار شاخص هم‌خطی یا عدد کاندیشن کاهش می‌یابد البته مقدار کاهش کم است یعنی در شناسایی بهبود خواهیم داشت، هر چند مقدار کاهش چندان زیاد نیست.

جدول (۸): تحلیل حساسیت خروجی سرعت V به ضرایب

C_{xa} و C_{x0} در چندین فرکانس

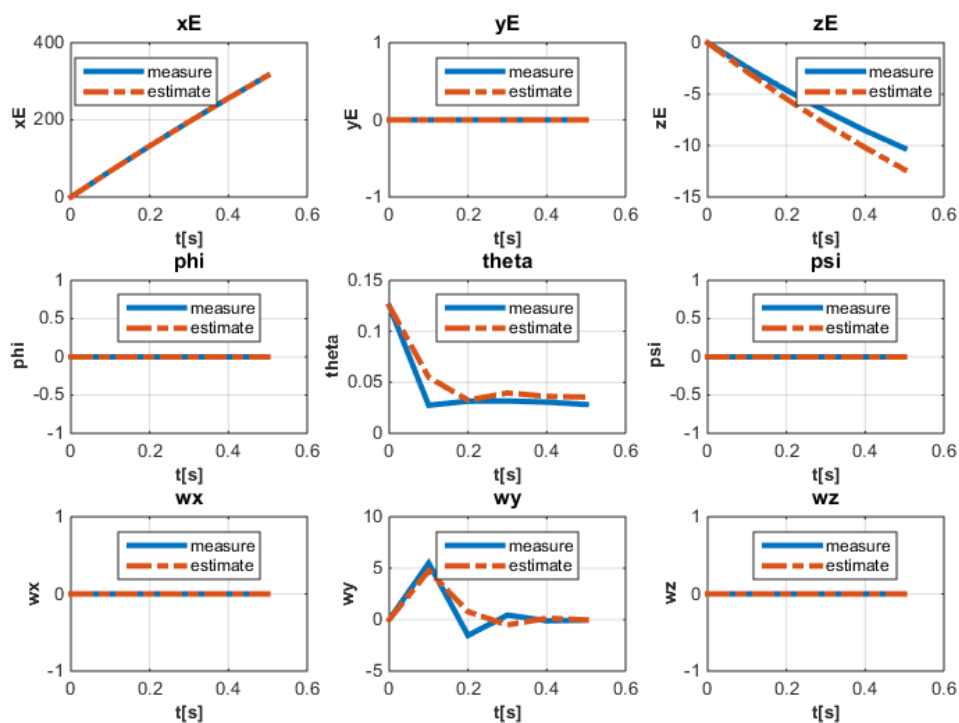
پارامتر	f=10Hz	f=20Hz	f=40Hz
δ^{msqr}	(0.1032 0.0001)	(0.0970 0.0001)	(0.0939 0.0001)
γ_K	۲۵۰۸	۲۴۴۵	۲۴۵۱
$rank(F)$	۲	۲	۲
$cond(F)$	$۶/۲۸۹۷*۱۰^۶$	$۵/۹۷۷۵*۱۰^۶$	$۶/۰۰۶۵*۱۰^۶$

۴-۴- شناسایی و تحلیل حساسیت خروجی سرعت

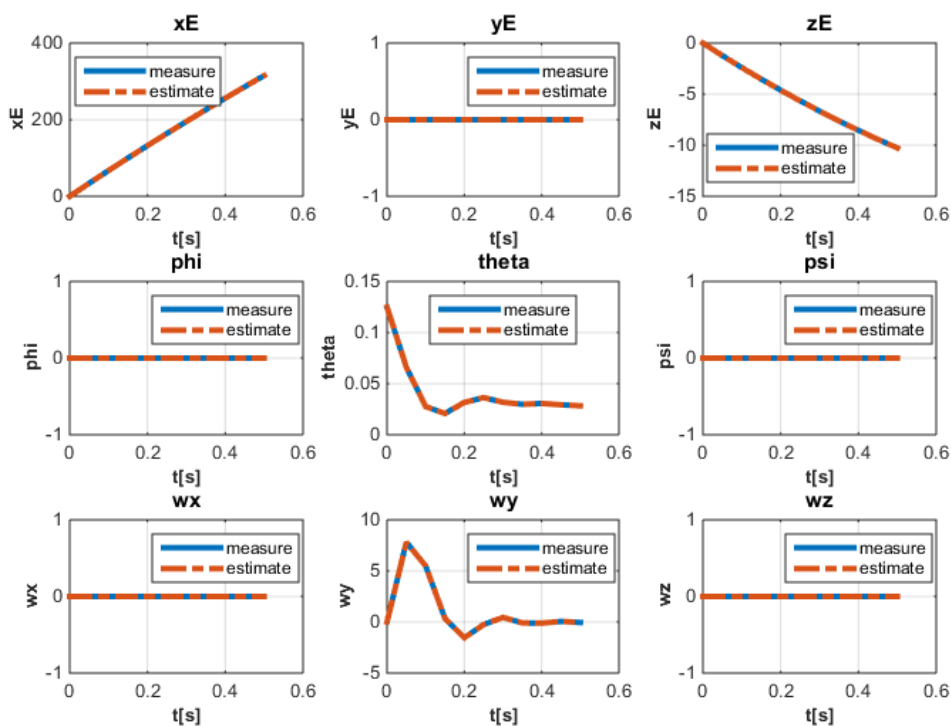
V به ضرایب C_{del} و C_{x0}

در این حالت، $\delta^{msqr} = (0.1032 \ 0)$ خواهد بود بنابراین اولین شرط لازم شناساپذیر بودن برقرار نیست یعنی سرعت خروجی V به C_{del} حساسیت ندارد. ماتریس اطلاعات فیشر نیز رنک کامل نیست (شرط لازم شناساپذیر بودن برقرار نیست) و همچنین شاخص هم‌خطی یا عدد کاندیشن $\gamma_K = \infty$ بی‌نهایت خواهد شد (طبق شرط دوم شناساپذیر بودن در حالت کلی هرچه این ضریب کمتر باشد هم خطی بودن کمتر خواهد بود).

در چنین حالتی انتخاب ضرایب قابل‌شناسایی اشتباه بوده و فرکانس داده‌برداری نیز در مسئله تغییری ایجاد نمی‌کند و باید ضرایب انتخاب‌شده تغییر کنند و با توجه به رنک ماتریس فیشر حداقل یکی از ضرایب غیرقابل شناسایی است و باید در فرآیند شناسایی حذف گردد.



شکل (۴): نمودار داده‌های پروازی ایروبالستیک و نتایج شبیه‌سازی با ضرایب نامی و ضرایب $C_{z\alpha}$ و $C_{z\dot{\alpha}}$ ، $C_{x\alpha}$ ، $C_{x\dot{\alpha}}$ در فرکانس ۱۰ هرتز



شکل (۵): نمودار داده‌های پروازی ایروبالستیک و نتایج شبیه‌سازی با ضرایب نامی و ضرایب $C_{z\alpha}$ و $C_{z\dot{\alpha}}$ ، $C_{x\alpha}$ ، $C_{x\dot{\alpha}}$ در فرکانس ۲۰ هرتز

۴-۶- شناسایی ضریب C_{ma} با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ

در این حالت پارامتر شناسایی C_{ma} و پارامترهای اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ می‌باشند. حد و حدس اولیه تخمین ضریب به صورت جدول ۱۲ در نظر گرفته شده است.

جدول (۱۲): محدوده تعیین شده و تخمین اولیه شناسایی

ضریب C_{ma} با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ			
ضریب	تخمین اولیه	حد پایین	حد بالا
C_{ma}	۰	-۱	۱

نتایج مربوطه در جدول ۱۳ قابل مشاهده است.

جدول (۳): شناسایی ضریب C_{ma} با سرعت و زاویه θ

پارامتر	حدس اولیه	مقدار واقعی	تخمین ۱ (f=10Hz)	تخمین ۲ (f=20Hz)
C_{ma}	✓	-۰.۳۱۵۰	-۰.۰۷۴۷۸	-۰.۰۷۴۵۵۶

مشاهده می‌شود که با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ ، ضریب C_{ma} با دقت خوبی محاسبه نمی‌شود.

در این حالت بردار حساسیت نرمال $\tilde{S}_y(p^*)$ در فرکانس ۱۰ هرتز برای سرعت برابر خواهد بود با:

$$\tilde{S}_y(p^*) = \tilde{S}_y(C_{ma}) = 10^{-3} \times \begin{pmatrix} 0.1288 \\ 0.0888 \\ 0.514 \\ 0.0587 \\ 0.0488 \end{pmatrix}$$

این موضوع نشان می‌دهد خروجی (V) در زمان‌های مختلف به C_{ma} حساسیت بسیار کمی دارد. همچنین شرط شناساپذیر بودن را ندارد.

بردار حساسیت نرمال $\tilde{S}_y(p^*)$ در فرکانس ۱۰ هرتز برای زاویه θ برابر خواهد بود با:

$$\tilde{S}_y(p^*) = \tilde{S}_y(C_{ma}) = \begin{pmatrix} 10.0378 \\ -5.0816 \\ 2.3060 \\ -0.6445 \\ -0.3279 \end{pmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به دلیل دقت کمتر ضرایب تخمینی در فرکانس ۱۰ هرتز، نمودارهای داده‌های پروازی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی به‌دلیلی دقت کمتر ضرایب تخمینی، کاملاً بر روی یکدیگر منطبق نیستند، اما نتایج حاصل از شبیه‌سازی با ضرایب تخمین زده شده و داده‌های پروازی ایروبالستیک به‌دلیل تخمین با دقت بالا در فرکانس ۲۰ هرتز بر روی یکدیگر منطبق شده‌اند.

جهت تحلیل حساسیت، $\delta^{msqr} = (0.1032 \ 0.0001 \ 0.00066 \ 0.000009)$ خواهد بود که اولین شرط شناساپذیر بودن این است که این مقدار مخالف صفر باشد. طبیعی است هرچه مقدار تابع بالا برای یک پارامتر بیشتر باشد حساسیت نیز نسبت به آن بیشتر است. این نتایج در جدول ۱۰ نشان داده شده‌اند. بنابراین حساسیت نسبت به C_{x0} بیشترین مقدار و حساسیت نسبت به C_{zq} کمترین مقدار است. ماتریس اطلاعات فیشر نیز رنک کامل خواهد بود (شرط لازم شناساپذیر بودن) و همچنین شاخص هم خطی یا عدد کاندیشن $\gamma_K = 2.796e+06$ خواهد بود که بر طبق شرط دوم شناساپذیر بودن در حالت کلی هرچه این ضریب کمتر باشد هم خطی بودن کمتر خواهد بود. با این عدد کاندیشن و در این وضعیت هم خطی بودن قوی برقرار بوده و بهتر است از خروجی‌های دیگری علاوه بر γ برای تخمین ضرایب استفاده گردد.

جدول (۱۱): حساسیت سرعت نسبت به C_{za} ، C_{x0} و C_{zq}

پارامتر	f=10Hz	f=20Hz	f=40Hz
δ^{msqr}	$\begin{pmatrix} 0.103200 \\ 0.000117 \\ 0.000664 \\ 0.000009 \end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix} 0.0970148 \\ 0.000114 \\ 0.000658 \\ 0.000009 \end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix} 0.093898 \\ 0.000112 \\ 0.000653 \\ 0.000009 \end{pmatrix}^T$
γ_K	2.8e+06	3.55e+05	9.08e+04
$rank(F)$	4	4	4
$cond(F)$	7.82e+12	1.26e+11	8.25e+09

نتایج مربوطه در جدول ۱۷ قابل مشاهده است.

جدول (۱۷): شناسایی ضریب C_{ma} با سرعت و زاویه θ

پارامتر	حدس اولیه	مقدار واقعی	تخمین ۱ (f=10Hz)	تخمین ۲ (f=20Hz)
C_{zq}	✓	۰	-۱/۵	-۱/۵

مشاهده می‌شود که با اندازه‌گیری سرعت، ضریب C_{zq} با دقت بسیار خوبی محاسبه می‌شود.

۴-۹- شناسایی ضرایب C_{x0} , C_{xa} , C_{za} , C_{zq} و C_{mq} با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ

در این حالت، پارامترهای شناسایی، ضرایب C_{x0} , C_{xa} , C_{za} , C_{zq} و پارامترهای اندازه‌گیری سرعت V و زاویه θ می‌باشند. محدوده حدس اولیه برای ضرایب به صورت جدول ۱۸ تعیین شده است.

جدول (۱۸): محدوده تعیین شده و تخمین اولیه شناسایی ضرایب C_{x0} , C_{xa} , C_{za} , C_{zq} و C_{mq} با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ

ضریب	تخمین اولیه	حد پایین	حد بالا
C_x	۰	-۱	۰
C_{xa}	۰	-۱	۰
C_{za}	۰	-۱	۰
C_{zq}	۰	-۵	۰
C_{mq}	۰	-۱۰	۰

نتایج مربوطه در جدول ۱۹ قابل مشاهده است.

جدول (۱۹): نتایج شناسایی ضرایب C_{x0} , C_{xa} , C_{za} , C_{zq} و C_{mq} با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ

پارامتر	حدس اولیه	مقدار واقعی	تخمین ۱ (f=10Hz)	تخمین ۲ (f=20Hz)
C_{x0}	-۰/۱	-۰/۳	-۰/۱۴۳۹۵	-۰/۱۳۸۳۸
C_{xa}	۰	-۰/۰۰۰۵	-۰/۰۵۰۵۹۱	-۰/۰۵۲۳۶۷
C_{za}	-۰/۰۵	-۰/۱	-۵/۶۳۲۳ ^{۹۷}	-۲/۵۶۱۸ ^{۹۷}
C_{zq}	-۰/۵	-۱/۵	-۰/۰۱۰۲۰۱	-۲/۳۲۱۷
C_{mq}	-۲	-۷	-۰/۳۵۱۴۸	-۰/۳۵۳۳۳

این موضوع نشان می‌دهد زاویه θ در زمان‌های مختلف به C_{ma} حساسیت دارد. همچنین $\delta^{msqr} = 5.14630$ خواهد بود که مخالف صفر است و اولین شرط شناساپذیر بودن را دارد. ماتریس اطلاعات فیشر نیز رنک کامل خواهد بود (شرط لازم شناساپذیر بودن) و همچنین شاخص هم خطی یا عدد کاندیشن $\gamma_K = 132$ خواهد بود.

جدول ۱۴ شاخص‌های مطرح‌شده برای زاویه θ و ضریب C_{ma} را نشان می‌دهد. طبق این جدول شرط اول و دوم شناساپذیر بودن برای هر دو فرکانس برقرار است.

جدول (۱۴): حساسیت زاویه θ نسبت به C_{ma}

پارامتر	f=10Hz	f=20Hz
δ^{msqr}	۵/۱۴۶۳	۳/۷۹۴۹
γ_K	۱۳۲	۱۴۴
$rank(F)$	۱	۱
$cond(F)$	۱	۱

۴-۷- شناسایی ضریب C_{mq} با اندازه‌گیری زاویه θ

در این حالت پارامتر شناسایی C_{mq} و پارامتر اندازه‌گیری θ می‌باشد. نتایج مربوطه در جدول ۱۵ قابل مشاهده است.

جدول (۱۵): شناسایی ضریب C_{mq} با زاویه θ

پارامتر	حدس اولیه	مقدار واقعی	تخمین ۱ (f=10Hz)	تخمین ۲ (f=20Hz)
C_{mq}	✓	۰	-۷	-۷

با شناسایی انجام‌شده زاویه شبیه‌سازی مربوط به شناسایی تقریباً برابر با زاویه اندازه‌گیری به‌دست آمده است.

۴-۸- شناسایی ضریب C_{zq} با اندازه‌گیری سرعت

در این حالت پارامتر شناسایی C_{zq} و پارامتر اندازه‌گیری سرعت می‌باشد. حد و حدس اولیه تخمین ضریب به صورت جدول (۱۶) در نظر گرفته شده است.

جدول (۱۶): محدوده تعیین شده و تخمین اولیه شناسایی

ضریب C_{ma} با اندازه‌گیری سرعت و زاویه θ

ضریب	تخمین اولیه	حد پایین	حد بالا
C_{zq}	۰	-۵	۵

۶- مراجع

1. Chapman, G. T. and Kirk, D. B. "A Method for Extracting Aerodynamic Coefficients from Free-Flight Data", AIAA journal, Vol. 8, no. 4, pp. 753-758, 1970.
2. Dupuis, A. "Aeroballistic Range Tests of a Dart Model at Supersonic Speeds", Proc. Int. Conf. 15th Atmospheric Flight Mechanics, Quebec, Canada, 1988.
3. Tam, T., Ruffin, S., Yates, L., Gage, P., Bogdanoff, D. and Morgenstern, J. "Sonic Boom Testing of Artificially Blunted Leading Edge (ABLE) Concepts in the NASA Ames Aeroballistic Range", Proc. Int. Conf. 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit Reno, NV, Moffett Field, Canada, 2000.
4. Brown, J. D., Bogdanoff, D. W., Yates, L. A., and Chapman, G. T. "Transonic Aerodynamics of a Lifting Orion Crew Capsule from Ballistic Range Data", J. Spacecraft Rockets, Vol. 47, pp. 36-47, 2010.
5. Topper, B., Brown, T. G., Bukowski, E., Davis, B. S., Hall, R. A., Muller, P. C., Vong, T. T., and Brandon, F. J. "Feasibility of Determining Aerodynamic Coefficients for a NASA Apollo Body with the Use of Telemetry Data From Free Flight Range Testing", presented at the Army Research Lab Aberdeen Proving Ground MD Weapons and Materials Research Directorate, 2007.
6. Wey, P., Bastide, M., Martinez, B., Srulijes, J., and Gnemmi, P. "Determination of Aerodynamic Coefficients from Shock Tunnel Free Flight Trajectories", Proc. Int. Conf. 28th Aerodynamic Measurement Technology, Ground Testing, and Flight Testing, New Orleans, Louisiana, 2012.
7. Toyoda, A., Imaizumi, T., and Sasoh, A. "Near Field Pressure Measurement around Three-Dimensional Free Flight Models", Proc. Int. Conf. 31st AIAA Applied Aerodynamics, San Diego, CA, 2013.
8. Toyoda, A., Sasoh, A., Imaizumi, T. and Ooyama, T. "Near Field Pressure Measurement around Free Flight 69 Degree Swept Back Delta Wing Model", Proc. Int. Conf. 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, Kissimmee Florida, 2015.
9. Iwakawa, A., Furukawa, D., Aoki, Y. and Sasoh, A. "Free Flight Measurement of Aircraft Model using Aero Ballistic Range", Proc. Int. Conf. 33rd AIAA Applied Aerodynamics, Dallas, Texas, 2015.

نتایج جدول ۱۹ نشانگر خطای زیاد در ضرایبی مانند C_{za} , C_{zq} , C_{mq} است که خطا در ضریب اول ناشی از مشاهده پذیری کم و دو ضریب دینامیکی بعدی برای اینکه تخمین مناسبی از سرعت زاویه‌ای پیچ در دست نیست ایجاد می‌گردد. با اندازه‌گیری مناسب سرعت زاویه‌ای پیچ احتمالاً این مشکل بر طرف خواهد شد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا با استفاده از داده‌های شبیه‌ساز پرواز ایروبالستیک و با روش حداقل مربعات و معادلات شش درجه آزادی، برخی ضرایب آیرودینامیکی تخمین زده شد و با نتایج موجود در شبیه‌ساز مقایسه گردید. در ادامه حساسیت سرعت و زاویه θ با ضرایب آیرودینامیکی و مشتقات پایداری با استفاده از ماتریس حساسیت و ماتریس اطلاعات فیشر مورد تحلیل قرار گرفت.

مشاهده گردید که در اکثر موارد، بالا بردن تعداد ایستگاه‌های داده‌برداری و فرکانس داده‌برداری، دقت تخمین ضرایب بیشتر می‌شود و شناسایی ضرایب بهبود می‌یابد.

از تحلیل حساسیت سرعت نسبت به ضرایب آیرودینامیکی و مشتقات پایداری مشاهده گردید که هر یک از ضرایب C_{x0} , C_{α} , C_{za} و C_{zq} نسبت به پارامتر سرعت حساس بوده و هیچ‌گونه حساسیتی برای سرعت نسبت به ضریب C_{idel} وجود ندارد. از این رو نمی‌توان با اندازه‌گیری پارامتر سرعت و از روش تقریب پارامترها، ضریب C_{idel} را تخمین زد و باید خروجی‌های دیگری را در نظر گرفت.

همچنین مشاهده گردید که حساسیت سرعت نسبت به ضریب C_{x0} بیشتر از سایر ضرایب است، بنابراین همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد، با نادیده گرفتن اثرات دیگر پارامترهای متغیر، با تقریب بالایی می‌توان ضریب C_{x0} را به صورت جداگانه و همچنین هم‌زمان با تقریب دیگر ضرایب محاسبه نمود (نتایج نشان داده است که سرعت بیشترین تأثیر را از ضریب C_{x0} نسبت به دیگر پارامترهای متغیر را دارد). همچنین با توجه به نتایج به دست آمده حساسیت نسبت به سرعت به ترتیب برای ضرایب C_{za} , C_{α} و C_{zq} بیشترین تا کمترین را از خود نشان می‌دهند.

16. Piekutowski, A. J. and Poormon, K. L. "Development of a Three-Stage, Light-Gas Gun at the University of Dayton Research Institute", *Int. J. Impact Eng.*, Vol. 33, pp. 615–624, 2006.
17. Banks, H., Cintrón-Arias, A. and Kappel, F. "Parameter Selection Methods in Inverse Problem Formulation", in *Mathematical modeling and validation in physiology*, ed: Springer, Berlin, Germany, 2013, pp. 43-73.
18. Weijers, S. R. and Vanrolleghem, P. A. "A Procedure for Selecting Best Identifiable Parameters in Calibrating Activated Sludge Model No. 1 To Full-Scale Plant Data", *Water science and technology*, Vol. 36, pp. 69-79, 1997.
19. Kuh, E. and Welsch, R. E. "Regression diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity", Vol. 163: Wiley-Interscience, 1980.
10. Abtahi, S. F. "Identification of Dynamic and hydrodynamic Characteristics of an Underwater Vehicle Using Physical Data and Robust Control", PhD Dissertation, Department of mechanic engineering, Shiraz university, 2019.
11. Levine, W. S. "The Control Systems Handbook, Control System Advanced Methods", (2nd ed.): CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, US, 2010.
12. Siouris, G. M. "Missile Guidance and Control Systems", Springer, New York, US, 2004.
13. Albisser, M. "Identification of Aerodynamic Coefficients from Free Flight Data", *Centre de Recherche en Automatique de Nancy*, Vandoeuvre-les-Nancy, France, 2015.
14. Masoominia, M. A. "Principles of Coordinate Systems and Rotation", Sharif University of Technology Press, Tehran, Iran, 1988.
15. Keesman, K. J. "System Identification", An Introduction: Springer Science & Business Media, London, UK, 2011.

