علمی- پژوهشی

مقایسه عملکرد ماتریس‌های پیش‌شرطی در گستره وسیعی از جریان‌های داخلی و خارجی

مهدی مقدس خراسانی [۱] عدنان محمدی [۲] محمدحسن جوارشکیان [۳*]

دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

(تاریخ دریافت:۲۱ /۱۴۰۰/۰۳؛تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۶ تاریخ پذیرش:۱۴۰۲/۰۹/۱۵ تاریخ انتشار:۱۴۰۲/۱۲/۰۱)
DOR: https://dorl.net/dor/20.1001.1.23223278.1400.10.2.3.0

چکیده

در این پژوهش ابتدا با توجه به ماتریس ژاکوبین پیش‌شرطی برحسب متغیرهای بقایی، بردارهای ویژه، مقادیر ویژه و قدرت امواج به‌صورت یکپارچه برای سه روش ترکل، چوی-مرکل و اریکسون استخراج می‌گردد. بدین‌منظور این روش‌های پیش‌شرطی در یک الگوریتم چگالی‌مبنا دو بعدی با روش بالادستی "رو" و یک شبکه بی‌سازمان برای معادلات اویلر توسعه داده می‌شود. دقت و نرخ همگرایی این روش‌های پیش‌شرطی برای جریان‌های خارجی حول ایرفویل NACA0012 ، ایرفویل سه المانه 30P-30N و جریان داخل کانال با برآمدگی در شرایط مختلف جریان مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از روش‌های پیش‌شرطی نه‌تنها نرخ همگرایی را برای جریان قابل و غیر قابل تراکم افزایش می‌دهند؛ بلکه دقت حل برای جریان تراکم‌ناپذیر را نیز نسبت به روش کلاسیک به‌طور چشمگیر بهبود می‌دهد. همچنین مقایسه روش‌های پیش‌شرطی نشان می‌دهد که هر سه روش از نظر دقت، جواب‌های تقریبا یکسانی را ارائه می‌دهند. اما از نظر نرخ همگرایی، روش پیش‌شرطی ترکل نرخ همگرایی بهتری را ارایه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: پیش‌شرطی، متغیرهای بقایی، تراکم‌ناپذیر، روش بالادستی "رو"

Comparing the Performance of Preconditioning Matrices in Wide Range of Internal and External Flows

Moghadas Khorasani,M, **Mohammadi, A.** **Djavareshkian, M.H.***

Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

(Received:2021/06/11, Revised: 2021/10/28, Accepted: 2021/12/06, Published: 2022/02/20)

ABSTRACT

In this study, by considering jacobian matrix based on conservative variables, eigenvalues, eigenvectors, and wave strength for three types of preconditioners which are introduced by Turkel, Choi&Merkel and Eriksson are drawn in a unified mathematical manner. For this aim, these preconditioning methods are implemented in two-dimensional density-base “Roe” upwind scheme on unstructured meshes for Euler equations. Accuracy and rate of convergence are examined by external computing flow over NACA0012 airfoil, three-element 30P-30N airfoil, and internal flow over a bump for different flow conditions. This study shows that the application of preconditioning schemes not only increases the rate of convergence for compressible and incompressible flows dramatically; but also improves accuracy for incompressible flow in comparison with the classical method. This study also indicates that all preconditioning schemes provide approximately the same accuracy, but in terms of convergence rate, the Turkel preconditioning scheme provides a better rate of convergence among all the aforementioned preconditioned matrixes.

Keywords: Preconditioning, Conservative Variables, Incompressible, “Roe” Upwind Scheme

۱- دانشجو کارشناسی ارشد: Moghadakhorasani@mail.um.ac.ir

۲- دانشجو دکتری: admohammadi@mail.um.ac.ir

۳- استاد (نویسنده مسئول): javareshkian@um.ac.ir

فهرست علائم و اختصارات

A	ماتریس ژاکوبین
AOA	زاویه حمله، deg
C	سرعت صوت، m/s
C_P	گرمای ویژه در فشار ثابت، $J/kg.K$
CFL	عدد کورانت
E	انرژی کل، J
H_0	آنتالپی کل، J/kg
M	ماتریس بردارهای ویژه
R^{+1}	موج مشخصه خروجی
R^{-1}	موج مشخصه ورودی
T	دما، K
u	مولفه سرعت در راستای x، m/s
v	مولفه سرعت در راستای y، m/s

علائم یونانی

α	پارامتر آزاد ماتریس پیش‌شرطی ترکل
β	پارامتر پیش‌شرطی
Γ	ماتریس پیش‌شرطی
γ	نسبت ظرفیت گرمایی ویژه
λ	مقادیر ویژه
ρ	چگالی، kg/m^3
Δt	گام زمانی، s

زیرنویس

C	متغیرهای بقایی
CM	چوی-مرکل
p	متغیرهای اولیه
T	ترکل
E	اریکسون

بالانویس

~	میانگین رو

۱- مقدمه

دینامیک سیالات محاسباتی به‌طور گسترده در صنعت، مراکز تحقیقاتی و دانشگاهی در زمینه طراحی و پروسه تحلیل به‌کار می‌رود. روش‌های محاسباتی با توجه به ضرورت جواب‌دهی در دامنه وسیع از شرایط جریان، شامل جریان‌های تراکم‌ناپذیر و جریان‌های تراکم‌پذیر با سرعت بالا، همواره به چالش کشیده می‌شوند. جریان‌های تراکم‌ناپذیر اولین‌بار توسط الگوریتم‌های فشار مبنا[1] مورد توجه قرار گرفت. همزمان الگوریتم‌های چگالی مبنا[2] در زمینه جریان‌های آیرودینامیکی گذرصوتی و مافوق صوت، توسعه داده شدند. به‌طور کلی برای جریان‌هایی با عدد ماخ کمتر از ۰/۳ به‌علت تغییرات محلی خیلی کم چگالی، جریان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود. یکی از روش‌های محبوب برای حل مسائل با جریان‌های تراکم‌پذیر، استفاده از پروسه تایم مارچینگ[3] می‌باشد. از دلایل محبوبیت این روش، پایداری و نرخ همگرایی مناسب در جریان‌های گذر صوتی و مافوق‌صوت ذکر شده است. همچنین این روش برای حل سیستم معادلات هذلولوی از مشتق فیزیکی زمان استفاده می‌کند. اما در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، اختلاف سرعت امواج جابه‌جایی و سرعت امواج اکوستیک[4] با کاهش عدد ماخ، افزایش می‌یابد که در این حالت سیستم معادلات به اصطلاح دچار سختی[5] میشود و سرعت نرخ همگرایی پایین می‌آید. از نظر ریاضیات، در جریان‌های تراکم‌ناپذیر، به‌علت این‌که ماهیت سیستم معادلات هذلولوی نمی‌باشد، روش تایم مارچینگ مناسب نیست. از طرفی ممکن است هم‌زمان قسمتی از جریان، جریان تراکم‌ناپذیر باشد در حالیکه قسمتی دیگر از جریان به‌شدت تراکم‌پذیر و حتی امواج ضربه‌ای[6] تشکیل شده باشد. به طور مثال می‌توان به جریان خارجی آیرودینامیکی با زاویه حمله زیاد حول ایرفویل چندتکه، کسکید[7] توربین و پمپ که دارای نواحی سکون زیادی هستند اشاره کرد. همچنین در جریان‌های داخلی می‌توان به نازل‌هایی با میزان همگرایی زیاد اشاره نمود. در این نازل‌ها در قسمت ورودی ناحیه مادون صوت و با عدد ماخ خیلی کمی وجود دارد، در حالی که ممکن است در خروجی نازل جریان تراکم پذیر باشد. در مسائل احتراقی با سرعت پایین نیز به علت انتقال حرارت سطحی و حجمی ممکن است ماهیت جریان تراکم‌پذیر باشد. در نهایت مهندسان ترجیح می‌دهند از یک حلگر یکپارچه و

---
[1] Pressure-base
[2] Density-base
[3] Time marching
[4] Acoustic
[5] Stiffness
[6] Shock waves
[7] Cascade

تمام سرعت[1] که در طیف وسیع از شرایط جریان کار می‌کند استفاده کنند. بنابراین برای رفع موارد مذکور برای اسکیم‌های[2] تراکم پذیر، روش‌های پیش‌شرطی[3] معرفی می‌شوند. روش‌های پیش‌شرطی با تغییر مقادیر ویژه سیستم معادلات، اختلاف سرعت ترم‌های آکوستیک و سرعت سیال را کم کرده و عدد شرطی (نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه به کم‌ترین مقدار ویژه) را به عدد یک نزدیک می‌کند. این کاهش اختلاف به کمک ضرب یک ماتریس در جملات زمانی سیستم معادلات انجام می‌شود. بدین ترتیب نرخ همگرایی مستقل از عدد ماخ می‌شود.

۱-۱- پیشینه پژوهش

کورین [۱] از نخستین محققانی بود که در سال ۱۹۶۷ به بررسی سختی معادلات حاکم و نرخ همگرایی در جریان‌های با عدد ماخ پایین پرداخت. او با استفاده از مفهوم تراکم‌پذیری مصنوعی و اضافه کردن آن به معادله پیوستگی، که شامل جمله مشتق زمانی فشار بود، سیستم معادلات متقارن و هذلولوی با پایداری عددی و نرخ همگرایی بالا برای طیف گسترده‌ای از اعداد ماخ را به‌دست آورد. در ادامه ترکل [۲] مفهوم تراکم‌پذیری کورین را به معادلات مومنتوم[4] توسعه و ماتریس پیش‌شرطی خود را ارائه داد. سیستم معادلات ماهیت هذلولوی پیدا کرد و دقت حل عددی حفظ گردید. چوی و مرکل [۳] در سال ۱۹۹۳ با فرض معادله حالت اضافی برای جریان لزج و اریکسون [۴] در سال ۱۹۹۶ با فرض این‌که نرخ تغییرات فشار با یک پارامتر کاهنده کاهش یابد، ماتریس‌های خود را معرفی کردند. ویس و اسمیت [۵] ماتریس پیش‌شرطی خود را برای جریان لزج با چگالی ثابت و متغیر معرفی کردند. ون‌لیر و همکاران [۶] روش پیش‌شرطی بهینه برای دامنه وسیع از اعداد ماخ معرفی کردند. آنها از سه نوع اسکیم برحسب گام‌های زمانی مختلف، شامل گام زمانی محلی[5] ، کلی[6] و مشخصه‌ای[7] برای بررسی اثر آنها بر نرخ همگرایی استفاده کردند. هجرانفر و پارسه [۷] با بهره‌گیری از مفهوم تراکم‌پذیری مصنوعی کورین، به بررسی عملکرد معادلات پیش‌شرطی غیر قابل‌تراکم برحسب متغیرهای اولیه ناویر استوکس در طیف وسیع از اعداد رینولدز در مختصات منحنی‌الخط پرداختند. روش‌های پیش‌شرطی چنان‌چه برحسب مقادیر موضعی سیال در هر نقطه طراحی شود به آن روش پیش‌شرطی موضعی و چنان‌چه ماتریس پیش‌شرطی بر مبنای مقادیر جریان آزاد طراحی شود، به آن روش پیش‌شرطی کلی گویند. ماتریس‌ها پیش‌شرطی معرفی شده تاکنون، ماتریس‌های پیش‌شرطی موضعی بودند. در زمینه ماتریس‌های کلی می‌توان به تحقیقات یلدریم [۸، ۹] و اونربا [۱۰، ۱۱] اشاره کرد. آنها به‌ترتیب از آنتالپی جریان آزاد و ماخ جریان آزاد برای طراحی ماتریس پیش‌شرطی خود استفاده کردند. علی‌رغم پایداری و نرخ همگرایی مناسب در اعداد ماخ پایین، ماتریس‌های پیش‌شرطی کلی با کاهش دقت در این اعداد ماخ مواجه می‌شوند. اما ماتریس‌های پیش‌شرطی موضعی در اعداد ماخ پایین با مشکلات پایداری و افزایش اغتشاشات به‌ویژه در نواحی سکون مواجه می‌شوند. تاکنون مطالعاتی نیز در زمینه رشد اغتششات در نزدیکی نقاط سکون انجام شده است [۱۲]. ترکل و واتسا [۱۳] نشان دادند که در جریان‌های با اعداد ماخ پایین، به‌ویژه در نزدیکی نقاط سکون به‌علت غیر متعامد شدن بردارهای ویژه، اغتشاشات افزایش یافته و نرخ همگرایی با سختی مواجه می‌شود. در مطالعه‌ای دیگر سانگ لی و همکاران [۱۴-۱۸] به توسعه الگوریتم تمام‌سرعت پرداختند. آنها با اعمال روش میان‌یابی مومنتوم[8] [۱۹]، مشکلات پایداری روش پیش‌شرطی موضعی و محدودیت گام زمانی را برطرف کردند و در شرایط مختلف جریان‌های غیر لزج و آشفته ارزیابی کردند. در زمینه افزایش نرخ همگرایی نیز پژوهش هایی انجام شده است. به‌طور مثال مایا و همکاران [۲۰-۲۲] در سال ۲۰۲۰ با بهره‌گیری از محدودکننده معرفی شده توسط داروموفال [۲۳] برای ماتریس پیش‌شرطی ترکل برحسب متغیرهای اولیه (غیر بقائی) به بررسی عملکرد این ماتریس در جریان

---
[1] All-Speed
[2] Schemes
[3] Preconditioning
[4] Momentum
[5] Local
[6] Global
[7] Characteristic
[8] MIM

پایای لزج و آشفته پرداختند. آنها نشان دادند که با استفاده از این محدودکننده، پایداری و نرخ همگرایی حل افزایش می‌یابد. یا در مطالعه‌ای دیگر اکبرزاده و همکاران [۲۴] با ارایه یک روش هموارسازی باقیمانده جدید همراه با روش پیش‌شرطی، توانستند نرخ همگرایی را در جریان‌های پایا و ناپایا به‌طور چشمگیر افزایش دهند. برخی از محققین روش‌های پیش‌شرطی را در محدوده گسترده‌تری مورد بررسی قرار داده‌اند. به‌طور مثال باهات و ماهِش [۲۵] به بررسی اثر روش پیش‌شرطی بر سختی معادلات، نرخ همگرایی و دقت حل در یک جریان دوفازی کاویتاسیون حول سیلندر پرداختند. در اکثر مطالعات پیشین، ماتریس‌های پیش‌شرطی طبق متغیرهای اولیه مورد بررسی قرار گرفتند و مطالعات کمتری از سوی محقیقین در زمینه یکپارچه‌سازی ماتریس‌های پیش‌شرطی برحسب متغیرهای اولیه انجام گرفته است. گیلارد [۲۶] به بررسی رفتار اسکیم‌های بالادستی در اعداد ماخ پایین پرداخت. او نشان داد در ماخ‌های پایین، اسکیم‌های عددی تراکم‌پذیر، به علت مقیاس نادرست فشار از مرتبه اول عدد ماخ دچار حل غیر فیزیکی می‌شوند. برای حل این مشکل او با استفاده از ماتریس پیش‌شرطی و اصلاح ترم اتلاف مصنوعی بر حسب متغیرهای بقایی توانست مشکل را برطرف کند. همچنین جوارشکیان [۲۷] نشان داد که استفاده از فرم بقایی معادلات، در جریان‌هایی که شامل ناپیوستگی‌هایی همچون موج‌ضربه‌ای وجود دارد، به‌علت این‌که تغییرات متغیرهای جریان در محل تشکیل موج‌ضربه‌ای صفر و یا بسیار کوچک است، کیفیت تسخیر موج ضربه‌ای افزایش می‌یابد.

بنابراین در این پژوهش مهم‌ترین نکات نوآوری که در تحقیقات پیشین به آن پرداخته نشده یا کمتر مورد توجه بوده است را می توان به‌صورت ذیل عنوان نمود :

الف) یکپارچه سازیِ نحوهِ بیان معادلات سه ماتریس پیش شرطیِ (ترکل، چوی-مرکل، اریکسون) برحسب متغیرهای بقایی به کمک نرم‌افزار متلب در سیستم معادلات دوبعدیِ غیرلزج و حفظ این فرمت بقایی به‌دست آمده برای جریان‌تراکم پذیر ب) بهبود عملکرد حلگر رو در جریان‌های تراکم‌ناپذیر با سرعت بسیار پایین به کمک ماتریس‌های پیش‌شرطی ج) بررسی دقیق سه ماتریس پیش شرطیِ (ترکل، چوی-مرکل، اریکسون) در آزمایش‌های متنوعِ تدوین شده در جریان‌های داخلی و خارجی. در این واکاوی عملکرد ماتریس های مذکور به لحاظ میزان بهبود در دقت نتایج و سرعت همگرایی در قیاس با روش کلاسیک (روش بدون پیش‌شرطی) مورد توجه قرار گرفته است. د) معرفی ماتریسِ پیش شرطی با بهترین و بهینه‌ترین عملکرد با توجه به قسمت قبل نیز از عمده نکات کمتر دیده شده در پژوهش های پیشین است که این امر با واکاوی دقیق نتایج در آزمایش‌های انجام شده حاصل شده است. لازم به ذکر است که در این پژوهش قسمت مکانی معادلات طبق روش حجم محدود بالادستی "رو[۱] " و قسمت زمانی معادلات طبق روش رانگ کوتا[۲] گسسته سازی می‌شود.

۲- معادلات

شکل بقایی معادلات حاکم بر جریان غیرلزج دو بعدی که معادلات اویلر نام دارد به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}=0 \tag{۱}$$

که در آن $\vec{Q}_C$ بردار حل بقایی، $\vec{E}$ و $\vec{F}$ بردارهای شار غیرلزج است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\vec{Q}_C=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},\quad \vec{E}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+P\\ \rho uv\\ (\rho E+P)u\end{bmatrix},\quad \vec{F}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+P\\ (\rho E+P)v\end{bmatrix} \tag{۲}$$

در رابطه (۲) ρ چگالی، P فشار استاتیک، (u,v) سرعت‌های کارتزین و E انرژی کل است.

۲-۱- معرفی ماتریس‌های پیش‌شرطی

در حل پایای معادلات اویلر به روش تایم مارچینگ، عبارات زمانی در نهایت به سمت صفر میل کرده و بنابراین تغییر عبارت‌های زمانی هیچ تغییر در نتایج حل پایا ایجاد

[۱] Roe
[۲] Runge-Kutta

نمی‌کند. معادلات اویلر پیش‌شرطی طبق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\Gamma^{-1}\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}=0 \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t}+\Gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{Q}_C}\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x}+\Gamma\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}_C}\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x}=0 \quad (۴)$$

$$\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial t}+A_\Gamma\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x}+A_\Gamma\frac{\partial \vec{Q}_C}{\partial x}=0 \quad (۵)$$

در معادلات بالا Γ و A_Γ به‌ترتیب ماتریس پیش‌شرطی و ماتریس ژاکوبین پیش‌شرطی است.

۲-۱-۱- ماتریس پیش‌شرطی ترکل

ترکل [۲] برای تبدیل فرم بقایی معادلات اویلر به فرم غیر بقایی با استفاده از ماتریس انتقال بر مبنای متغیرهای اولیه $\vec{Q}_p=[\rho,u,v,S]^T$ استفاده کرد. او از مفهوم تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده کرده بود و این ترم مشتق زمانی فشار را به معادلات پیوستگی و مومنتوم توسعه داده بود. ماتریس پیش‌شرطی ترکل برحسب متغیرهای اولیه به فرم زیر است.

$$\Gamma_T\left(\vec{Q}_p\right)=\begin{bmatrix}\frac{C^2}{\beta^2} & 0 & 0 & \delta\\ \frac{\alpha u}{\rho\beta^2} & 1 & 0 & 0\\ \frac{\alpha v}{\rho\beta^2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (۶)$$

در ماتریس ترکل، β پارامتر تراکم‌پذیری مصنوعی، α و δ دو پارامتر آزاد هستند. پارامتر δ به علت اینکه در بردار ویژه و مقادیر ویژه حضور ندارد و همچنین اثری بر نرخ همگرایی ندارد، برای سادگی صفر در نظر گرفته می‌شود. پارامتر آزاد α که دامنه تغییرات آن $0\le\alpha\le 1$ می‌باشد. در طول محاسبات مقدار ثابتی را دریافت می‌کند و به‌ازای $\alpha=1$ بهینه‌ترین عدد شرطی حاصل می‌گردد. حال برای به‌دست آوردن ماتریس پیش‌شرطی ترکل برحسب متغیرهای بقایی از مشتق زنجیره‌ای رابطه (۷) استفاده می‌شود.

$$\Gamma_T\left(\vec{Q}_c\right)=\frac{\partial Q_c}{\partial Q_p}\Gamma_T\left(\vec{Q}_p\right)\frac{\partial Q_p}{\partial Q_c} \quad (۷)$$

مقادیر مشتق بقایی و مشتقات زنجیره ای مرتبط با آن در [۲۸] آورده شده است. ماتریس پیش‌شرطی ترکل برحسب متغیرهای بقای به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma_T=\begin{bmatrix}1-\Psi V_t & 2u\Psi & 2v\Psi & -2\Psi\\ -u\xi V_t & 1+2\xi u^2 & 2\xi uv & -2u\xi\\ -v\xi V_t & 2\xi uv & 1+2\xi v^2 & -2v\xi\\ -\omega V_t & 2u\omega & 2v\omega & 1-2\omega\end{bmatrix}$$

$$\Psi=\frac{(1-\beta)(\gamma-1)}{2C^2} \quad (۸)$$

$$V_t=u^2+v^2$$

$$\xi=\frac{\left(\alpha+(1-\beta)\right)(\gamma-1)}{2C^2}$$

$$\omega=\frac{\left(\alpha V_t+(1-\beta)H_0\right)(\gamma-1)}{2C^2}$$

۲-۱-۲- ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل

چوی و مرکل [۳] ماتریس پیش‌شرطی خود را برحسب متغیرهای اولیه $\vec{Q}_p=[p,u,v,T]^T$ به‌صورت زیر تعریف کردند.

$$\Gamma_{CM}\left(\vec{Q}_p\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\beta C^2} & 0 & 0 & 0\\ \frac{u}{\beta C^2} & \rho & 0 & 0\\ \frac{v}{\beta C^2} & 0 & \rho & 0\\ \frac{H_0}{\beta C^2}-1 & \rho u & \rho v & \rho C_p\end{bmatrix} \quad (۹)$$

که در آن C، H_0 و C_p به‌ترتیب آنتالپی‌کل، سرعت صوت و گرمای ویژه در فشار ثابت است. β نیز پارامتر پیش‌شرطی یا همان پارامتر تراکم‌پذیری مصنوعی است. برای محاسبه ماتریس پیش شرطی چوی- مرکل برحسب متغیرهای بقایی، با توجه به رابطه (۱۰) داریم:

$$\Gamma_{CM}^{-1}\left(\vec{Q}_c\right)=\Gamma_{CM}^{-1}\left(\vec{Q}_p\right)\frac{\partial Q_p}{\partial Q_c} \quad (۱۰)$$

بنابراین ماتریس پیش‌شرطی چوی و مرکل بر حسب متغیرهای بقایی به‌صورت رابطه (۱۱) به‌دست می‌آید.

$$\Gamma_{CM}=\begin{bmatrix}1+\mu & -\Phi u & -\Phi v & \Phi\\ u\mu & 1-\Phi u^2 & -\Phi uv & \Phi u\\ v\mu & -\Phi uv & 1-\Phi v^2 & \Phi v\\ H_0\mu & -u\Phi H_0 & -v\Phi H_0 & \Phi H_0+1\end{bmatrix}$$
$$\Phi=\frac{1-\gamma}{C^2}$$
$$\mu=1+\beta+\Phi H_0 \quad (11)$$

۲-۱-۳- ماتریس پیش‌شرطی اریکسون

اریکسون برای طراحی ماتریس پیش‌شرطی خود ابتدا سیستم معادلات را به فرم متغیرهای اولیه $\vec{Q}_p=[p,u,v,p]^T$ تبدیل کرد. او نشان داد علت اصلی سختی سیستم معادلات اویلر در سرعت‌های پایین نرخ بالای تغییرات فشار است. او نرخ تغییرات فشار را با پارامتر پیش‌شرطی کاهش داد و با استفاده از این اصل که در هر سیستم معادلات جریان، شرط آنتروپی می‌بایست ارضا گردد نرخ تغییرات چگالی را نیز به‌دست آورد. در نهایت ماتریس پیش‌شرطی خود را بر حسب متغیرهای اولیه به‌صورت زیر ارایه داد:

$$\Gamma_E\left(\vec{Q}_p\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{\beta-1}{C^2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta\end{bmatrix} \quad (12)$$

در نهایت مطابق با روند ذکر شده در دو ماتریس پیشین، با استفاده از مشتق زنجیره‌ای، فرم بقایی ماتریس پیش‌شرطی اریکسون به‌صورت رابطه (۱۳) به‌دست می‌آید.

$$\Gamma_E=\begin{bmatrix}1-\Psi V_t & 2u\Psi & 2v\Psi & -2\Psi\\ -u\Psi V_t & 1+2\Psi u^2 & 2\Psi uv & -2u\Psi\\ -v\Psi V_t & 2\Psi uv & 1+2\Psi v^2 & -2v\Psi\\ -\omega V_t & 2u\omega & 2v\omega & 1-2\omega\end{bmatrix}$$
$$\Psi=\frac{(1-\beta)(\gamma-1)}{2C^2} \quad (13)$$
$$\omega=\frac{((1-\beta)H_0)(\gamma-1)}{2C^2}$$

اگر دقت شود به ازای $\alpha=0$ در رابطه (۸)، ماتریس پیش‌شرطی اریکسون در رابطه (۱۳)، حاصل می‌شود.

۲-۱-۴- معرفی پارامتر پیش‌شرطی

برای محاسبه پارامتر پیش‌شرطی β، برای هر سه روش پیش‌شرطی، معمولا از یک رابطه قطع برای نواحی که ممکن است عدد ماخ به سمت صفر میل کند، همچون ناحیه سکون، استفاده می‌شود. ترکل [۲۹] برای رفع مشکل تکینگی[1] در نقاط سکون، رابطه زیر را ارائه داد.

$$\beta=\min\left[1,\max\left(K_2M_\infty^2,K_1\left(1+\frac{1-M_0^2}{M_0^4}M^2\right)M^2\right)\right] \quad (14)$$

که در آن M_0 عدد ماخ مرجع و به‌عنوان مقدار قطع به‌شمار می‌رود و حداکثر مقداری که پارامتر پیش‌شرطی میتواند اختیار کند، $\beta=1$ بوده و در این مقدار عملا روش پیش‌شرطی به روش کلاسیک تبدیل می‌شود. K_1 و K_2 دو پارامتر ثابت هستند که توسط کاربر تعیین می‌گردند. تجربه عددی نشان می‌دهد که مقدار K_2 به ابعاد شبکه در نزدیکی نقاط سکون بستگی دارد [۲۹]. ترکل [۲۹] نشان داد که مقدار K_1 می‌تواند بین ۱ و ۱/۱ و مقدار K_2 بین ۰/۴ و ۱ انتخاب شود. این پارامترها وابسته به شرایط مسئله، هندسه و شبکه مورد تحلیل است. در این تحقیق $K_1=1.05$ و $K_2=0.7$ و $M_0=0.1$ انتخاب می‌شود.

۲-۲- گسسته‌سازی معادلات

برای گسسته‌سازی معادلات اویلر دو بعدی، از یک شبکه بی‌سازمان و روش حجم محدود با الگوریتم بالادستی رو استفاده می‌شود. قسمت زمانی معادلات نیز طبق روش رانگ کوتا مرتبه ۴ به‌صورت صریح گسسته می‌شود.

۲-۲-۱- گسسته‌سازی مکانی معادلات

شکل انتگرالی معادلات اویلر پیش‌شرطی روی سطح معیار Ω با مرز $\partial\Omega$ به‌صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega}\vec{Q}_c dA+\Gamma\iint_{\partial\Omega}\vec{H}\left(\vec{Q}_c\right)\cdot\hat{n}ds=0 \quad (15)$$

که در رابطه بالا $\vec{H}$ شار عبوری از سطوح مرزی است و به‌صورت $\vec{H}\left(\vec{Q}_c\right)=E\left(\vec{Q}_c\right)i+F\left(\vec{Q}_c\right)j$ می‌باشد.

[1] Singularity

برای گسسته‌سازی قسمت مکانی معادلات، از یک شبکه بی‌سازمان با سلول‌های مثلثی استفاده شده است.

$$\vec{H}\left(\vec{Q}_c\right) = \sum_{j=1}^{Nedge}\left(E_j^i\left(\vec{Q}_c\right)N_{xj} + E_j^i\left(\vec{Q}_c\right)N_{yj}\right) \quad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶)، i معرف سلول‌های شبکه و j معرف اضلاع هر سلول است. قسمت مکانی رابطه طبق روش حجم محدود به‌صورتن رابطه (۱۷) معین می‌گردد.

$$\Gamma\int_{\partial\Omega}\vec{H}\left(\vec{Q}_c\right)\cdot\hat{n}ds = \Gamma\sum_{k=1}^{3}\vec{H}_k\cdot d\ell_k \quad (۱۷)$$

که ℓ طول هر وجه سلول و $\vec{H}_k$ شار عبوری از وجه k است که طبق رابطه (۱۶) محاسبه می‌شود.

$$\vec{H}_k = 0.5\left[\vec{H}\left(\vec{Q}_L\right)+\vec{H}\left(\vec{Q}_R\right)-\tilde{\Gamma}^{-1}\left|\tilde{A}_\Gamma\right|\Delta Q\right]_K \quad (۱۸)$$

در رابطه بالا جملات $\vec{Q}_L$ و $\vec{Q}_R$ به‌ترتیب بردار متغیرهای بقایی در سمت چپ و راست وجه k، $\tilde{A}_\Gamma$ نیز ماتریس ژاکوبین معادلات پیش‌شرطی و علامت ~ بیان‌گر مقادیر میانگین رو است. جزئیات مربوط به روش کلاسیک رو و میانگین‌گیری رو در مرجع [۲۶] آمده است. جمله $\tilde{\Gamma}^{-1}\left|\tilde{A}_\Gamma\right|\Delta Q$ همان ترم اتلاف مصنوعی روش رو است که برای هر ماتریس پیش‌شرطی جداگانه حساب می‌شود.

۲-۱-۱-۲- جمله میرایی روش‌های پیش‌شرطی

برای محاسبه ترم اتلاف پیش‌شرطی مطابق مرجع [۲۶] عمل می‌شود. ابتدا با قطری سازی ماتریس ژاکوبین روش‌های پیش‌شرطی $\tilde{A}_{\Gamma_Z} = \tilde{\Gamma}_Z\tilde{A}$، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس به‌صورت رابطه (۱۹) به‌دست می‌آید.

$$\tilde{A}_{\Gamma_Z} = \tilde{M}_Z\left|\Lambda_Z\right|\tilde{M}_Z^{-1} \quad (۱۹)$$

که Z بیان‌گر ماتریس پیش‌شرطی ترکل، اریکسون و یا چوی-مرکل، $\tilde{M}_Z$ و $\tilde{M}_Z^{-1}$ به‌ترتیب بردار ویژه سمت چپ و بردار ویژه سمت راست و $\left|\Lambda_Z\right|$ ماتریس قطری مقادیر ویژه می‌باشد. حال در گام بعد ترم اتلافی پیش‌شرطی مطابق رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\tilde{\Gamma}_Z^{-1}\left|\tilde{A}_{\Gamma_Z}\right|\Delta Q = \left(\tilde{\Gamma}_Z^{-1}\tilde{M}_Z\right)\left|\Lambda_Z\right|\left(\tilde{M}_Z^{-1}\Delta Q\right) \quad (۲۰)$$

مقادیر ویژه ماتریس قطری $\left|\Lambda_Z\right|$، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left|\Lambda\right| = \mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_4\right) \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \tilde{U}\\
\lambda_2 &= \tilde{U}\\
\lambda_3 &= 0.5\left[\left(1+\beta-\alpha\right)\tilde{U}+\sqrt{X}\right]\\
\lambda_4 &= 0.5\left[\left(1+\beta-\alpha\right)\tilde{U}-\sqrt{X}\right]
\end{aligned} \quad (۲۲)$$

در رابطه (۲۲) $X=\left[\left(1-\alpha+\beta\right)\tilde{U}\right]^2+4\beta\left(\tilde{C}^2-\tilde{U}^2\right)$ و $\tilde{U} = \tilde{u}nx+\tilde{v}ny$ می‌باشد. اگر در رابطه (۲۲) پارامتر α برابر با مقدار صفر در نظر گرفته شود، مقادیر ویژه سیستم معادلات پیش‌شرطی اریکسون و چوی-مرکل به‌دست می‌آید. حال حاصل ضرب معکوس هر یک از ماتریس‌های پیش‌شرطی در بردار ویژه ماتریس ژاکوبین پیش‌شرطی را به‌ترتیب در روابط (۲۴) و (۲۵) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_Z = \tilde{\Gamma}_Z^{-1}\tilde{M}_Z \quad (۲۳)$$

که برای روش چوی- مرکل حاصل معادله (۲۳) به‌صورت روابط (۲۴) می‌باشد.

$$R_{1_{CM}} = \begin{bmatrix} 0\\ -\tilde{u}\\ -\tilde{v}\\ -H_0-\dfrac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{2}\end{bmatrix},\quad R_{2_{CM}} = \begin{bmatrix}0\\ ny\\ -nx\\ -\tilde{V}\end{bmatrix}$$

$$R_{3_{CM}} = \begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}+r_{CM}\left(nx\right)\\ \tilde{v}+r_{CM}\left(ny\right)\\ r_{CM}\tilde{U}+\tilde{H}_0\end{bmatrix},\quad R_{4_{CM}} = \begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}+s_{CM}\left(nx\right)\\ \tilde{v}+s_{CM}\left(ny\right)\\ s_{CM}\tilde{U}+\tilde{H}_0\end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

$$\begin{cases} r_{CM} = 0.5\left[\left(1-\beta\right)\tilde{U}+\sqrt{X\big|_{\alpha=0}}\right]\\ s_{CM} = 0.5\left[\left(1-\beta\right)\tilde{U}-\sqrt{X\big|_{\alpha=0}}\right]\\ \tilde{V} = \tilde{v}nx-\tilde{u}ny\end{cases}$$

و برای ماتریس پیش‌شرطی ترکل حاصل معادله (۲۳) به‌صورت رابطه (۲۵) تعریف می‌شود.

$$R_{1_T}=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}\\ \tilde{v}\\ \dfrac{\tilde{u}^2+\tilde{v}^2}{2}\end{bmatrix},R_{3_T}=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}+r_T\left(nx\right)-\dfrac{\tilde{U}\tilde{V}\alpha\left(ny\right)}{r_T-X}\\ \tilde{v}+r_T\left(ny\right)+\dfrac{\tilde{U}\tilde{V}\alpha\left(nx\right)}{r_T-X}\\ \tilde{H}_0+r_T\tilde{U}+\dfrac{\tilde{U}\tilde{V}^2\alpha}{r_T-X}\end{bmatrix}$$

$$R_{2_T}=\begin{bmatrix}0\\ -ny\\ nx\\ \tilde{V}\end{bmatrix},\quad R_{4_T}=\begin{bmatrix}1\\ \tilde{u}+s_T\left(nx\right)-\dfrac{\tilde{U}\tilde{V}\alpha\left(ny\right)}{s_T+X}\\ \tilde{v}+s_T\left(ny\right)+\dfrac{\tilde{U}\tilde{V}\alpha\left(nx\right)}{s_T+X}\\ \tilde{H}_0+s_T\tilde{U}+s_T\dfrac{\tilde{U}\tilde{V}^2\alpha}{s+X}\end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

$$\begin{cases} r_T=0.5\left[\left(1+\beta-\alpha\right)\tilde{U}+\sqrt{X}+2\tilde{U}\right]\\ s_T=0.5\left[\left(1+\beta-\alpha\right)\tilde{U}-\sqrt{X}+2\tilde{U}\right]\end{cases}$$

حاصل ضرب بردار ویژه سمت راست در بردار بقا و یا همان قدرت امواج برای ماتریس‌های چوی مرکل و ترکل، به‌ترتیب به‌صورت روابط (۲۷) و (۲۸) تعریف می‌شوند.

$$\sigma_z=\tilde{M}_z^{-1}\Delta Q \quad (۲۶)$$

$$\sigma_{CM}=\begin{bmatrix}\Delta\tilde{\rho}-\dfrac{\Delta\tilde{P}}{\tilde{C}^2}\\ \left(-\Delta\tilde{\rho}+\dfrac{\Delta\tilde{P}}{\tilde{C}^2}\right)\tilde{V}-\tilde{\rho}\Delta\tilde{V}\\ \dfrac{\tilde{U}\Delta\tilde{\rho}+\tilde{\rho}\Delta\tilde{U}}{X|_{\alpha=0}}-\dfrac{\Delta\tilde{P}\left(r_{CM}-\tilde{U}\right)}{r_{CM}\left(r_{CM}-X|_{\alpha=0}\right)X|_{\alpha=0}}\\ \dfrac{\Delta\tilde{P}\left(s_{CM}-\tilde{U}\right)}{s_{CM}\left(s_{CM}+X|_{\alpha=0}\right)X|_{\alpha=0}}-\dfrac{\tilde{U}\Delta\tilde{\rho}+\tilde{\rho}\Delta\tilde{U}}{X|_{\alpha=0}}\end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

$$\sigma_T=\begin{bmatrix}\Delta\tilde{\rho}-\dfrac{\Delta\tilde{P}}{\tilde{C}^2}\\ \dfrac{\alpha\left(\tilde{V}\Delta\tilde{P}-\tilde{U}\rho\left(\tilde{u}\Delta\tilde{v}-\tilde{v}\Delta\tilde{u}\right)\right)+\tilde{C}^2\beta\rho\Delta\tilde{V}}{\beta\tilde{C}^2-\alpha\tilde{U}^2}\\ \dfrac{\rho\Delta\tilde{U}}{X}+\dfrac{\Delta\tilde{P}\left(X-r_T+\alpha\tilde{U}\right)}{X\left(-{r_T}^2+Xr_T+\alpha\tilde{U}^2\right)}\\ -\dfrac{\rho\Delta\tilde{U}}{X}-\dfrac{\Delta\tilde{P}\left(X+s_T-\alpha\tilde{U}\right)}{X\left({s_T}^2+Xs_T-\alpha\tilde{U}^2\right)}\end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

اگر در روابط (۲۵) و (۲۸) مقدار پارامتر $\alpha=0$ باشد، به‌ترتیب R_E و σ_E برای روش پیش‌شرطی اریکسون حاصل می‌گردد.

در نهایت ترم میرایی روش‌های پیش‌شرطی رو به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\tilde{\Gamma}_Z^{-1}\left|\tilde{A}_{\Gamma_Z}\right|\Delta\tilde{Q}=\sum_{k=1}^{4}\sigma_{K_Z}\left|\lambda_{k_Z}\right|R_{K_Z} \quad (۲۹)$$

شایان ذکر است که تمامی ماتریس‌های بردار ویژه و مقادیر ویژه روش‌های پیش‌شرطی با استفاده از ابزار سیمبولیک متلب استخراج گردید.

۲-۲-۲- گسسته سازی زمانی

شکل نیمه گسسته معادلات غیرپیش‌شرطی و کلاسیک اویلر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\Omega_j\left(Q_j\right)}{\Delta t}=R_j,\qquad j=1,2,3,\cdots \quad (۳۰)$$

و مقدار مانده‌ها به‌صورت پیش‌شرطی به فرم زیر اصلاح می‌گردد.

$$R_j=\Gamma_i\sum_{n=k(j)}^{3}\vec{H}_{j,n}\cdot\Delta\ell_{j,n} \quad (۳۱)$$

در روابط (۳۰) و (۳۱)، زیرنویس j نشان‌دهنده شماره سلول مورد محاسبه و $n{=}k(j)$ به معنای سلول شماره n در وجه k می‌باشد. علامت‌های $d\ell$ و Ω به‌ترتیب معرف اندازه وجه و مساحت سلول و R نشان‌دهنده بردار مانده‌ها، H بردار شار عمود بر وجه و Q متغیرهای بقایی می‌باشد. برای محاسبه تغییرات بردار متغیرهای بقایی ΔQ، احتیاج به داشتن مقدار گام زمانی Δt، می‌باشد. مقدار گام زمانی برای هر سلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta t_j\le\frac{CFL\times\Omega_j}{\sum_{k=1}^{3}\left(\left(\lambda_{max}\right)_k d\ell_k\right)} \quad (۳۲)$$

بزرگ‌ترین مقدار ویژه λ_{max} برای معادلات پیش‌شرطی ترکل و چوی-مرکل و اریکسون برابر با λ_3 در رابطه (۲۲) می‌شود. برای انتگرال‌گیری زمانی رابطه از روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای با دقت زمانی مرتبه چهار استفاده شده است [۳۰].

$$
\begin{aligned}
&Q_j^{(0)} = Q_j^{(n)} \\
&Q_j^{(l)} = Q_j^{(0)} - \tau_\ell \frac{\Delta t}{A_j} R_j^{(\ell-1)}, \qquad \ell = 1,\ldots,4 \\
&Q_j^{(n+1)} = Q_j^{(m)} \\
&\tau_\ell = \frac{1}{5-\ell}, \qquad \ell = 1,\ldots,4
\end{aligned} \tag{۳۳}
$$

۲-۳- میرا کننده آنتالپی

استخراج معادلات میرایی آنتالپی بر اساس تحقیقات ترکل و جیمسون [۳۰] شکل گرفته‌است که آنها معادلات ناپایای اویلر را به فرم معادلات ناپایای پتانسیل کاهش دادند. نتایج این محققین نشان داد استفاده از میرایی آنتالپی منجر به افزایش عدد کورانت مجاز، پایداری حل و در نتیجه افزایش نرخ همگرایی در جریان‌های مادون صوت می‌شود. بنابراین، بردار متغیر های بقایی $\vec{Q}_c$ در هر گام زمانی به‌صورت زیر اصلاح می‌گردد. در رابطه (۳۶) η و κ پارامترهای ازاد و به‌ترتیب برابر با ۰/۱۵ و ۰ در نظر گرفته شدند.

$$
\begin{aligned}
&\rho_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{1+\eta\Delta t_i\left(H_i^n - H_\infty\right)} \\
&(\rho u)_i^{n+1} = \frac{(\rho u)_i^n}{1+\eta\Delta t_i\left(H_i^n - H_\infty\right)} \\
&(\rho v)_i^{n+1} = \frac{(\rho v)_i^n}{1+\eta\Delta t_i\left(H_i^n - H_\infty\right)} \\
&(\rho E)_i^{n+1} = \frac{(\rho E-\kappa)_i^n}{1+\eta\Delta t_i\left(H_i^n - H_\infty\right)} \\
&H_i^n = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}
\end{aligned} \tag{۳۴}
$$

۲-۴- شرایط مرزی

جهت شبیه‌سازی میدان جریان غیرلزج دوبعدی برای سطح جسم و دور دوست دو نوع شرایط مرزی تعریف شود.

۲-۴-۱- شرط مرزی سطح جسم

در جریان غیرلزج شرایط مرزی روی سطح جسم باید به‌گونه‌ای اعمال شود که مولفه سرعت عمود بر سطح صفر شود. این شرط سبب ساده شدن بردار شار در مرزهای دیوار می‌شود به‌طوری که برای تعیین شار مرزی فقط نیاز به محاسبه مقدار فشار روی این اضلاع است. با فرض این‌که فاصله مرکز نخستین سلول تا سطح دیوار به اندازه کافی کوچک است مقدار فشار روی دیوار را می‌توان برابر فشار روی سلول مجاور آن گرفت

۲-۴-۲- شرط مرزی دور دست

اعمال شرایط مرزی مشخصه‌ها بر مبنای غیرمتغیرهای ریمان که شرایط مرزی غیر انعکاسی هستند به عنوان شرایط مرزی دوردست برای جریان‌های خارجی سبب افزایش دقت نتایج و افزایش نرخ همگرایی می‌گردد. در این شرط مرزی براساس خروجی R^+ و یا ورودی R^- بودن امواج مشخصه، مقادیر جریان در مرزها را مشخص می‌کند. این شرطی مرزی قابلیت اعمال در ورودی و خروجی‌های مافوق صوت و مادون صوت را دارد. جزئیات معرفی امواج مشخصه و نحوه تعریف مقادیر فشار،چگالی و آنتروپی در [۳۱] آمده است.

۳- نتایج و بحث

در این بخش به بررسی عملکرد سیستم معادلات کلاسیک و پیش‌شرطی با استفاده از ماتریس‌های پیش شرطی برای تحلیل جریان خارجی دو بعدی تراکم‌پذیر حول ایرفویل NACA0012، ایرفویل سه تکه 30P-30N و جریان داخل یک کانال با برآمدگی ۱۰٪ در شرایط مختلف مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرند. الگوریتم مورد استفاده روش "رو" بالادستی در شبکه بی‌سازمان بوده و جهت افزایش پایداری حل عددی و عدد کورانت مجاز، از روش میرایی آنتالپی استفاده شده است.

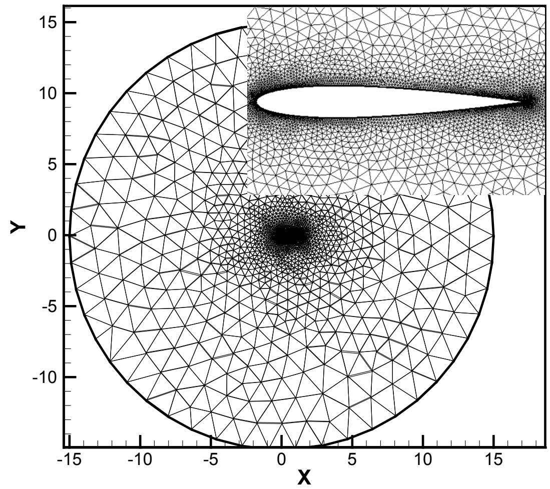
۳-۱- ایرفویل NACA0012

اولین هندسه مورد بررسی برای مقایسه ماتریس‌های پیش‌شرطی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ می‌باشد. در ابتدا جهت بررسی استقلال از شبکه مطابق جدول **۱** در ازای افزایش سلول‌های شبکه محاسباتی از ش-۳ به ش-۴ تفاوت چشمگیری در نتایج حاصل نمی‌شود. در نتیجه در این پژوهش ش-۳ با تعداد ۱۰۲۴۲ المان و ۵۳۸۶ گره مطابق شکل **۱** به‌عنوان شبکه محاسباتی معیار برای تحلیل جریان غیرلزج حول این ایرفویل انتخاب شده است. مقایسه توزیع ضریب فشار وخطوط هم‌فشار به‌ترتیب در شکل **۲** و **۳** در عدد ماخ ۰/۸۵ و زوایه حمله ۱ درجه آورده شده‌اند. در این تحقیق هدف اصلی مقایسه نتایج از لحاظ دقت و نرخ

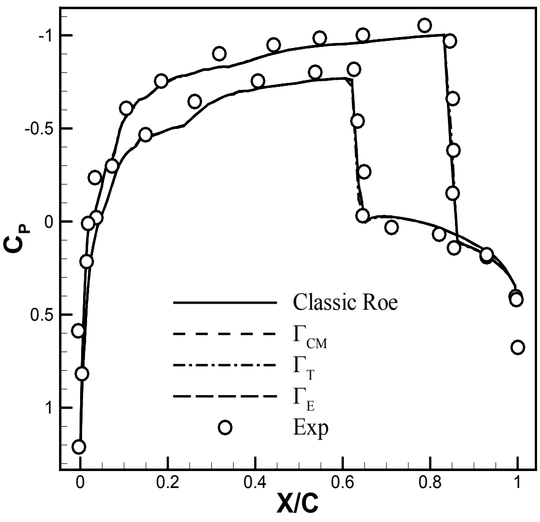
همگرایی در شرایط مختلف می‌باشد. بررسی نتایج نشان می‌دهد که استفاده از هر سه ماتریس پیش‌شرطی و روش کلاسیک از نظر دقت یکسان بوده و توزیع ضریب فشار آنها روی سطح ایرفویل با داده‌های تجربی [۳۲] تطابق خوبی دارند.

جدول (۱): نتایج بررسی شبکه‌های مختلف حول ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = ۰/۲۵$ و $AOA = ۷^\circ$

اسم شبکه	تعداد سلول	ضریب برآ	ضریب پسا
ش-۱	۳۲۱۸	۰/۷۲۲۹	۰/۰۴۹۹۵
ش-۲	۷۳۴۵	۰/۷۴۵	۰/۰۳۵۳
ش-۳	۱۰۲۴۲	۰/۷۷۳	۰/۰۳۲۹
ش-۴	۱۴۹۷۰	۰/۷۷۶۲	۰/۰۳۲۷



شکل (۱): شبکه محاسباتی حول ایرفویل NACA0012



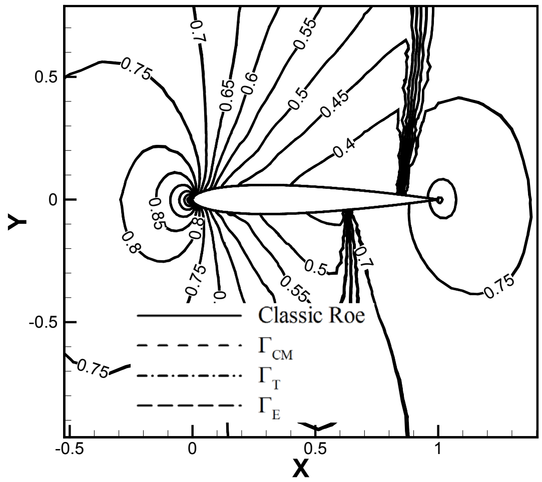
شکل (۲): مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = ۰/۸۵$ و $AOA = ۱^\circ$

از نظر همگرایی با توجه به شکل **۴** عملکرد ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل (Γ_{CM}) و اریکسون (Γ_E) بر مبنای متغیرهای بقایی همچون روش غیرپیش‌شرطی است اما ماتریس پیش‌شرطی ترکل (Γ_T) عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که ماتریس چوی-مرکل و اریکسون تنها وابسته به پارامتر پیش‌شرطی β بوده و با افزایش عدد ماخ این مقدار به سمت عدد واحد میل می‌کند، سیستم معادلات پیش‌شرطی به سیستم معادلات غیرپیش‌شرطی تبدیل می‌شود و بنابراین روش پیش‌شرطی اثر خود را از دست می‌دهد. بنابراین انتظار می‌رود نتایج روش‌های پیش‌شرطی مطابق با روش کلاسیک شود (شکل **۲** و **۳**). اما ماتریس پیش‌شرطی ترکل علاوه بر پارامتر پیش‌شرطی β به پارامتر α نیز وابسته است که با افزایش سرعت جریان اثر آن در سیستم معادلات از بین نمی‌رود و باعث افزایش نرخ همگرایی حل در سرعت‌های مادون صوت بالا و گذرصوتی می‌گردد. در این بررسی میزان نرخ همگرایی به‌کمک ماتریس پیش‌شرطی ترکل ۳۸٪ نسبت به روش کلاسیک و ماتریس‌های پیش‌شرطی اریسکون و چوی-مرکل بهبود پیدا کرد. مقدار عدد کورانت برای تمامی روش‌ها در جریان گذرصوتی برابر با ۱/۵ در نظر گرفته شد.

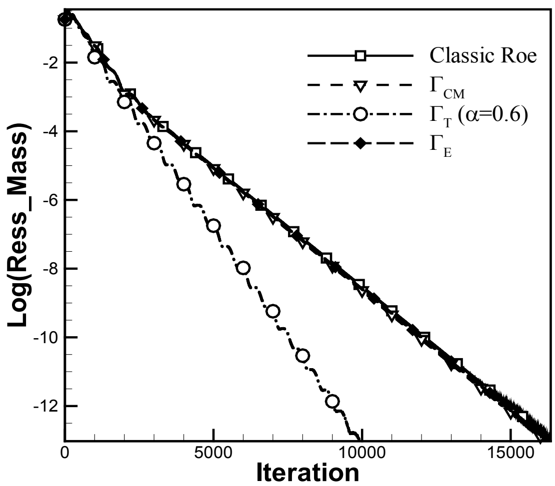
در ادامه برای بررسی بیشتر اثر تراکم‌ناپذیری، جریان حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ در اعداد ماخ پایین‌تر ۰/۱۵، ۰/۰۵، ۰/۰۰۱ و زاویه حمله ۷° مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طور که بیان شد کارایی ماتریس پیش‌شرطی ترکل (Γ_T) وابسته به پارامتر α بوده و انتخاب مقدار بهینه این پارامتر نیاز به تجربه عددی دارد. بنابراین برای ایرفویل ناکا۰۰۱۲ مقدار بهینه این پارامتر که با بیش‌ترین نرخ همگرایی همراه است و در دقت جواب‌ها تغییر حاصل نمی‌گردد، ۰/۶ در نظر گرفته می‌شود. دقت شود که هزینه محاسباتی روش پیش‌شرطی در هر تکرار به‌دلیل محاسبات بیشتر کمی بالاتر از روش کلاسیک است اما در مجموع روش پیش شرطی نسبت به روش بدون پیش شرط سرعت بالاتری دارد (شکل **۵**). در جدول **۲** مشخصات سیستم مورد استفاده و مدت زمان پردازش لازم برای همگرایی روش‌های پیش‌شرطی در مقایسه با روش کلاسیک، برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ ۰/۱۵ مورد

بررسی قرار گرفته است، نتایج نشان می‌دهد روش پیش‌شرطی نسبت به روش کلاسیک دارای سرعت همگرایی بالاتری (۱/۱۷ برابر سریع‌تر از روش کلاسیک) است. بعلاوه اینکه روش پیش‌شرطی ترکل کمترین زمان (۱/۴۳ برابر سریع‌تر از روش کلاسیک) را برای همگرایی بین تمامی روش‌ها برای مساله مورد بررسی نیاز دارد.

در ادامه برای بررسی اثرات روش پیش‌شرطی در اعداد ماخ پایین تر، جریان حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ در عدد ماخ ۰/۰۵ بررسی شده است. خطوط هم‌فشار و توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل برای روش‌های پیش‌شرطی و کلاسیک به‌ترتیب در شکل‌های **۶** و **۷** آمده است.



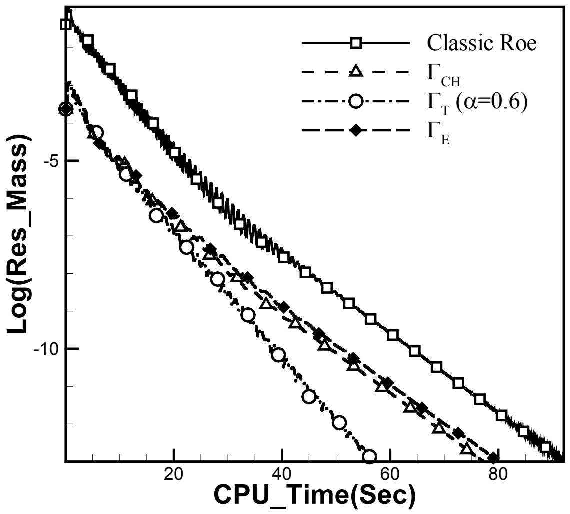
شکل (۳): مقایسه خطوط هم‌فشار حول ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = ۰/۸۵$ و $AOA = ۱^\circ$



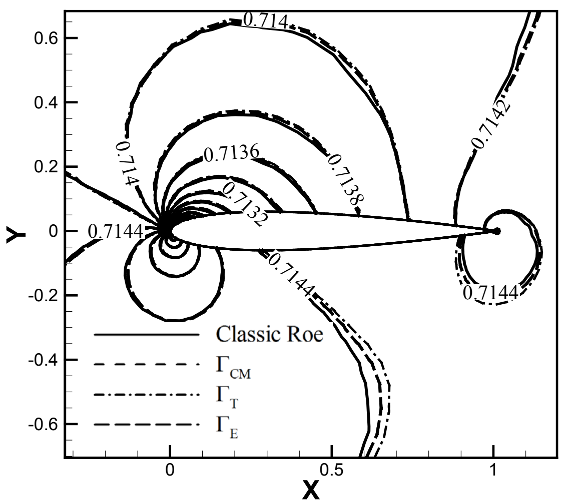
شکل (۴): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = ۰/۸۵$ و $AOA = ۱^\circ$

جدول (۲): مدت زمان پردازش سیستم برای همگرایی جریان حول ایرفویل NACA0012 در عدد ماخ ۰/۱۵ و زاویه حمله ۷

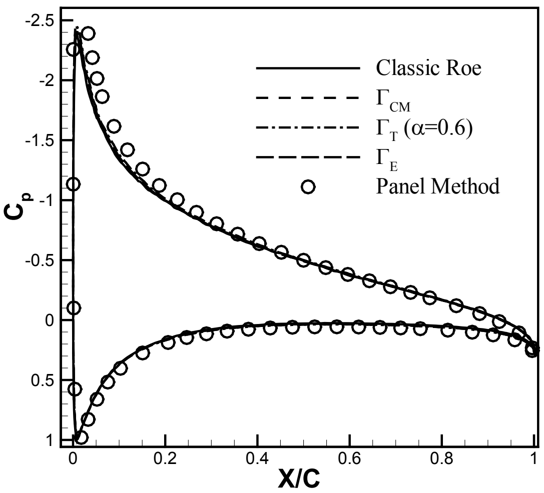
مشخصات سیستم	*CPU_Time(s)*	*روش حل*
Asus laptop with Core™ Intel® i7-4720HQ CPU @ 2.60 GHz & 8 GB RAM	۵۵	Γ_T
	۸۰	Γ_E
	۷۵	Γ_{CM}
	۹۴	کلاسیک



شکل (۵): مقایسه نرخ همگرایی برحسب زمان حل برای ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = ۰/۱۵$ و $AOA = ۷^\circ$

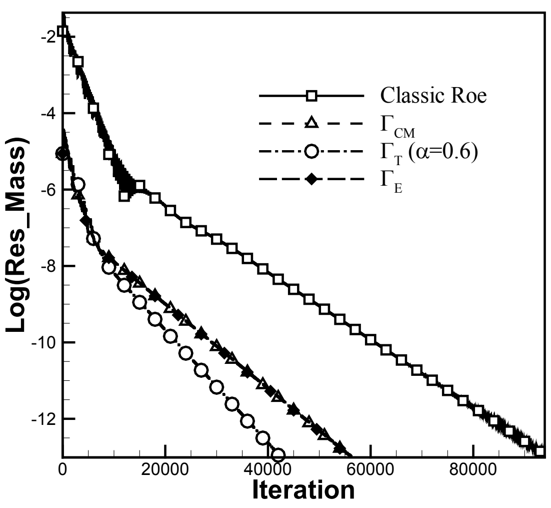


شکل (۶): مقایسه خطوط هم‌فشار حول ایرفویل NACA0012 در $M_\infty = ۰/۰۵$ و $AOA = ۷^\circ$



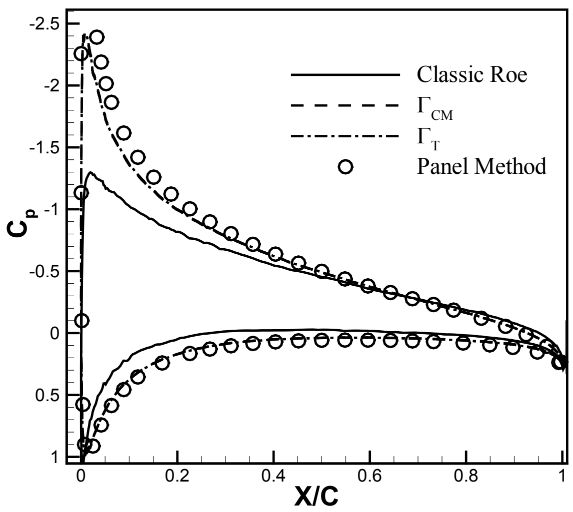
شکل (۷): مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل NACA0012 در $M_{\infty} = ۰/۰۵$ و $AOA = ۷^{\circ}$

نتایج توزیع ضریب فشار روی ایرفویل نشان‌دهنده تفاوت ناچیز بین نتایج حاصل از روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک با روش پانل می باشد. اما در مقایسه نرخ همگرایی (شکل ۸) عملکرد روش‌های پیش‌شرطی چوی-مرکل و اریکسون به طور محسوسی با افزایش ۳۹٪ نرخ همگرایی نسبت به روش کلاسیک همراه است. همچین روش پیش‌شرطی ترکل عملکرد بهتری را به واسطه پارامتر آزاد α نسبت به روش پیش‌شرطی چوی- مرکل و اریکسون دارد و نرخ همگرایی را ۵۵٪ نسبت به روش کلاسیک بهبود می‌بخشد. مقدار عدد کورانت جهت مقایسه روش‌های پیش‌شرطی و کلاسیک برابر با ۰/۹ در نظر گرفته شد.

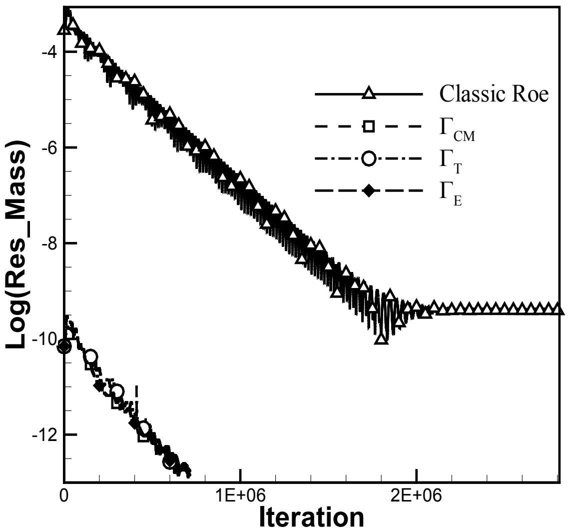


شکل (۸): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل NACA0012 در $M_{\infty} = ۰/۰۵$ و $AOA = ۷^{\circ}$

جهت بررسی دقیق‌ترِ ماتریس‌های پیش‌شرطی در اعداد ماخ بسیار پایین، جریان حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ در عدد ماخ ۰/۰۰۱ مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه توزیع ضریب فشار روش سطح ایرفویل در شکل **۹** نشان می دهد که روش کلاسیک، به‌علت عدم برخورداری از میزان اتلاف متناسب با فیزیکِ میدانِ کاملا تراکم‌ناپذیر؛ در ترم فشار پاسخ‌های مناسبی را ارائه نمی‌دهد. اما روش‌های پیش‌شرطی با برطرف کردن مشکل از طریق اصلاح ترم اتلاف مصنوعی روش کلاسیک قابلیت حل جریان در اعداد ماخ بسیار پایین را دارند و جواب یکسانی را ارائه می‌دهند. با توجه به شکل **۱۰** می‌توان دریافت که روش کلاسیک به علت اختلاف شدید مقادیر ترم‌های آکوستیک و سرعت سیال، قادر به همگرایی کامل نیست ولی روش‌های پیش‌شرطی این مشکل را برطرف می‌کنند. عملکرد روش‌های پیش‌شرطی مذکور از نظر نرخ همگرایی در اعداد ماخ بسیار پایین مشابه یک‌دیگر می‌شود و پارامتر α در اعداد ماخ بسیار پایین تاثیری بر افزایش و یا کاهش نرخ همگرایی ماتریس پیش‌شرطی ترکل ندارد. به‌طور کلی هر سه روش پیش‌شرطی میزان نرخ همگرایی را ۶۲٪ نسبت به روش کلاسیک افزایش می‌دهند. مقدار عدد کورانت جهت مقایسه عملکرد روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک در عدد ماخ ۰/۰۰۱ برابر با ۰/۰۱ در نظر گرفته شد.



شکل (۹): مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل NACA0012 در $M_{\infty} = ۰/۰۰۱$ و $AOA = ۷^{\circ}$

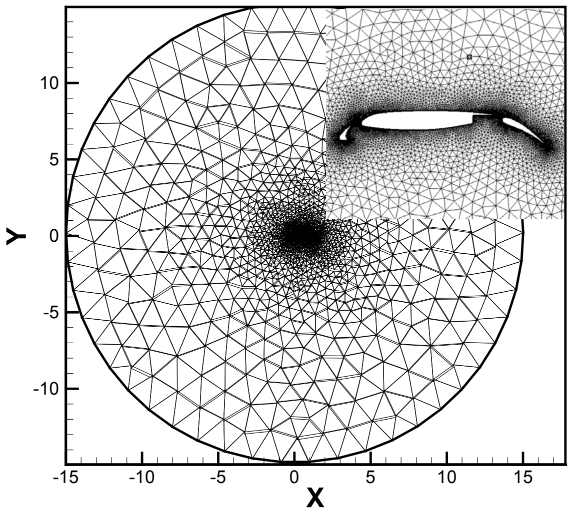


شکل (۱۰): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل NACA0012 در $M_{\infty} = ۰/۰۰۱$ و $AOA = ۷^{\circ}$

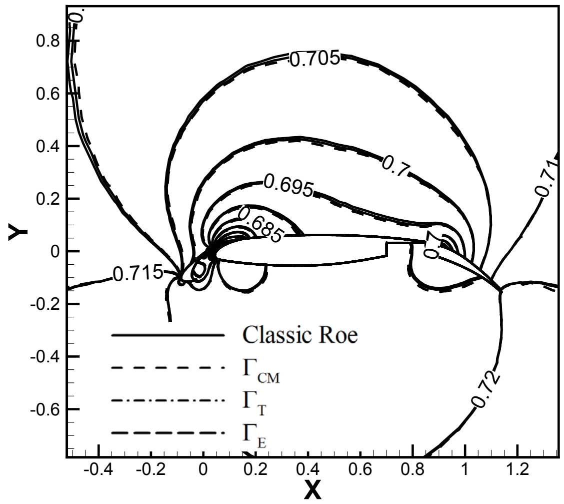
۳-۲- ایرفویل سه تکه 30P-30N

ایرفویل سه تکه مکدونالد داگلاس 30P-30N یک نمونه هندسه متداول برای آزمایش‌های عددی در ارتباط با ایرفویل‌هایی با براءِ زیاد می‌باشد که در سال ۱۹۹۳ توسط مرکز تحقیقاتی لانگلی ناسا معرفی گردید. به‌علت گرادیان‌های شدید فشار و انرژی جنبشی حول هندسه این ایرفویل، دقت محاسبات برای اسکیم‌های عددی همواره یک چالش بوده است. جهت ارزیابی ماتریس‌های پیش‌شرطی در هندسه‌های پیچیده‌تر، جریان دو بعدی حول ایرفویل سه تکه 30P-30N در اعداد مختلف ۰/۱۷، ۰/۰۳ و ۰,۰۰۳ با زاویه ۵/۵ حمله مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج تجربی [۳۳] مقایسه شده‌اند. همانند قبل برای بررسی استقلال از شبکه و دامنه حل، شبکه بهینه شده‌ای که از آزمایش‌های متعدد عددی به‌دست آمده است مطابق شکل **۱۱** این شبکه با ۱۹۳۷۲ المان و ۱۰۱۵۹ گره انتخاب می‌شود.

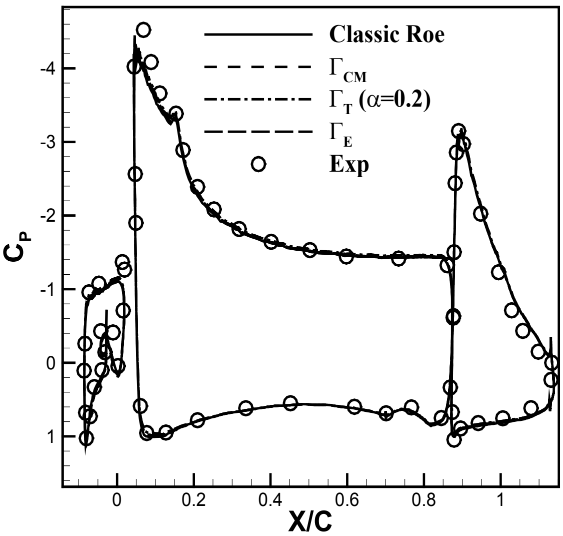
همان‌طور که قبلا گفته شد کارایی ماتریس پیش‌شرطی ترکل وابسته به پارامتر α است. مقدار بهینه این پارامتر، نیازمند تجربه عددی است. مقدار بهینه این پارامتر برای این آزمایش، بدون تغییر دقت و حفظ پایداری، و طبق آزمایش‌های متعدد صورت گرفته شده، مقدار ۰/۲ انتخاب می‌گردد. در شکل‌های **۱۲** و **۱۳** به‌ترتیب به مقایسه خطوط هم‌فشار و توزیع ضریب فشار روی سطح ایروفویل سه اِلمانه حاصل از سه ماتریس پیش‌شرطی و روش کلاسیک با نتایج عددی، برای عدد ماخ ۰/۱۷ و زاویه حمله ۵/۵ درجه آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش کلاسیک در عدد ماخ ۰/۱۷مشکلی نداشته و پاسخ فیزیکی درستی را می‌دهد. نتایج روش‌های پیش‌شرطی نیز از لحاظ دقت، مشابه یک‌دیگر بوده و توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل با نتایج تجربی مطابقت خوبی دارد.



شکل (۱۱): شبکه محاسباتی حول ایرفویل 30P-30N



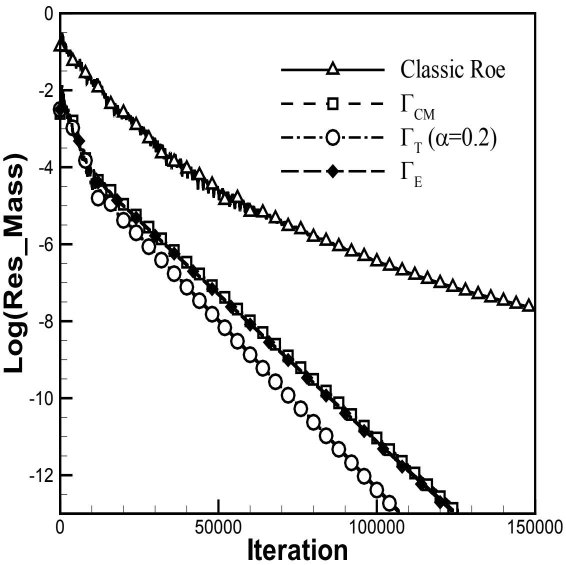
شکل (۱۲): مقایسه خطوط هم‌فشار حول ایرفویل 30P-30N در $M_{\infty} = ۰/۱۷$ و $AOA = ۵/۵^{\circ}$



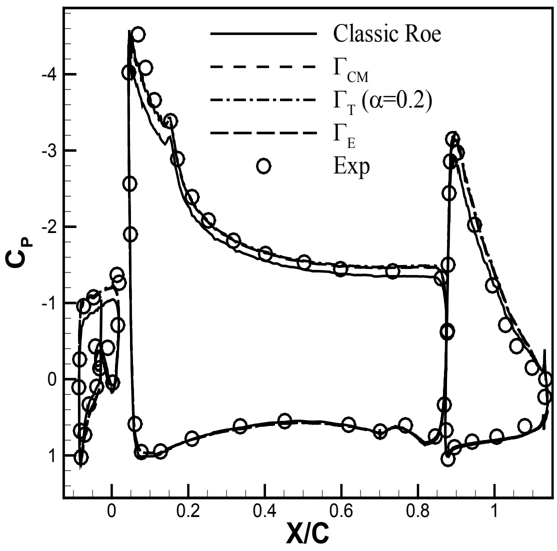
شکل (۱۳): مقایسه توزیع ضریب فشار حول ایرفویل 30p-30N در $M_\infty = ۰/۱۷$ و $AOA = ۵/۵^\circ$

مقایسه نرخ همگرایی ماتریس‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک در شکل **۱۴** نشان می‌دهد که کارایی ماتریس‌های پیش‌شرطی در اعداد ماخ پایین نسبت به روش کلاسیک با پیچیده شدن هندسه بیشتر شده و ماتریس‌های پیش‌شرطی چوی مرکل و اریکسون میزان نرخ همگرایی را ۷۳٪ و ماتریس ترکل نیز همچون مسئله قبلی به‌خاطر عدد شرطی نزدیک‌تر به واحد میزان نرخ همگرایی را ۸۰٪ نسبت به روش کلاسیک افزایش می‌دهند. در این تحلیل‌ها مقدار عدد کورانت برای تمامی روش‌ها برابر ۰/۵ در نظر گرفته شد.

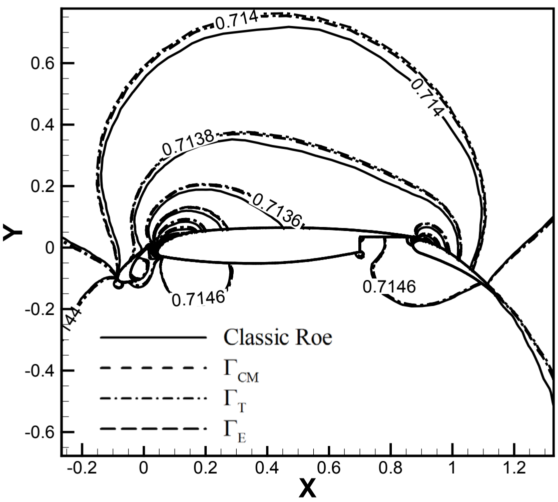
جهت بررسی اثرات پیش‌شرطی در اعداد ماخ پایین‌تر جریان حول ایرفویل 30P-30N در عدد ماخ ۰/۰۳ بررسی شده است. مقایسه خطوط هم‌فشار و توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل به‌ترتیب در شکل **۱۵** و **۱۶** نشان می‌دهند که نتایج سه روش پیش‌شرطی از انطباق خوبی با نتایج تجربی برخوردار هستند. با پیچیده شدن هندسه مورد تحلیل، سیستم معادلات کلاسیک در این ماخ با کاهش دقت همراه است. که این مشکل با روش‌های پیش‌شرطی مرتفع گردیده است. مقایسه نرخ همگرایی بین دو ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل و اریکسون و روش کلاسیک (شکل **۱۷**) حاکی از بهبود چشمگیر نرخ همگرایی روش‌های پیش‌شرطی نسبت به سیستم معادلات کلاسیک به میزان ۸۲٪ می‌باشد. از طرفی ماتریس پیش‌شرطی ترکل نسبت به ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل و اریکسون عمکرد بهتری از خود نشان می‌دهد و نرخ همگرایی را نسبت به روش کلاسیک ۸۷٪ بهبود می‌هد. جهت مقایسه صحت و کارایی روش‌های پیش‌شرطی برای تحلیل جریان حول این ایرفویل در عدد ماخ ۰/۰۳ ، مقدار عدد کورانت ۰/۲ در نظر گرفته شد.



شکل (۱۴): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل 30p-30N در $M_\infty = ۰/۱۷$ و $AOA = ۵/۵^\circ$

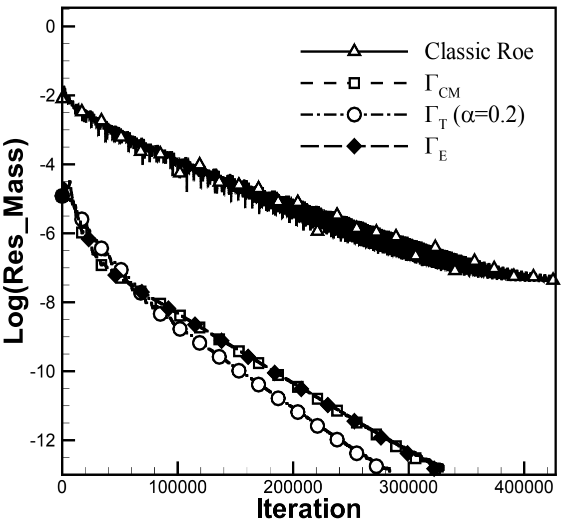


شکل (۱۵): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل 30p-30N در $M_\infty = ۰/۰۳$ و $AOA = ۵/۵^\circ$



شکل (۱۶): مقایسه خطوط هم‌فشار حول ایرفویل

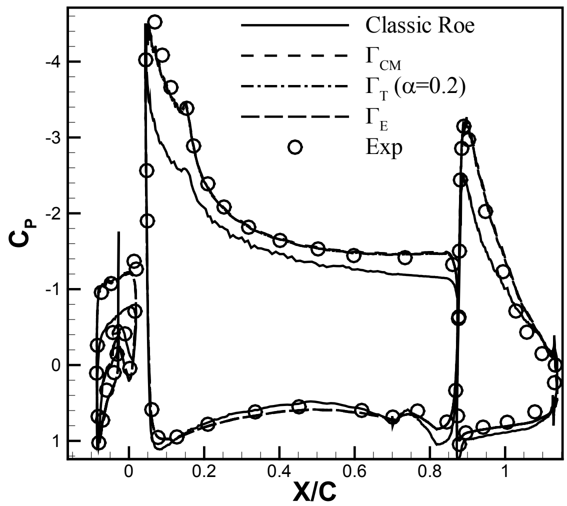
AOA = ۵/۵° و M_{∞} = ۰/۰۳ در 30p-30N



شکل (۱۷): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل

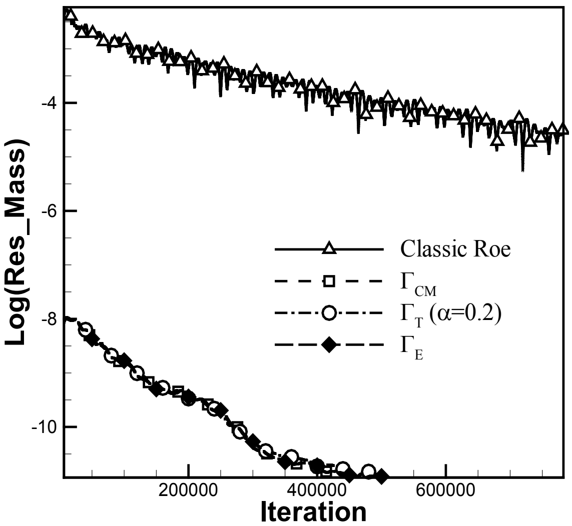
AOA = ۵/۵° و M_{∞} = ۰/۰۳ در 30p-30N

جهت بررسی ماتریس‌های پیش‌شرطی در اعداد ماخ خیلی پایین، جریان حول ایرفویل در عدد ماخ خیلی پایین M_{∞} = ۰/۰۰۳ نیز مورد بررسی قرار گرفته است. از مقایسه ضریب فشار در شکل **۱۸** روی سطح ایرفویل می‌توان دریافت که تمامی ماتریس‌های پیش‌شرطی مذکور قابلیت حل جریان در اعداد ماخ بسیار پایین را دارا هستند. اما روش کلاسیک همانطور که قبلا گفته شد به‌علت محاسبهِ غیر درستِ میدان فشار جهت توزیع مناسب ترم اتلافی در اعداد ماخ پایین، جواب فیزیکی مناسبی را ارائه نمی‌دهد. اما روش‌های پیش‌شرطی با رفع این مشکل و معرفی یک مقیاس دقیق برای توزیع مولفه های اتلافی در ترم فشاری، جواب فیزیکی درستی را ارائه می‌دهند.



شکل (۱۸): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل

AOA = ۵/۵° و M_{∞} = ۰/۰۰۳ در 30p-30N



شکل (۱۹): مقایسه نرخ همگرایی حل برای ایرفویل

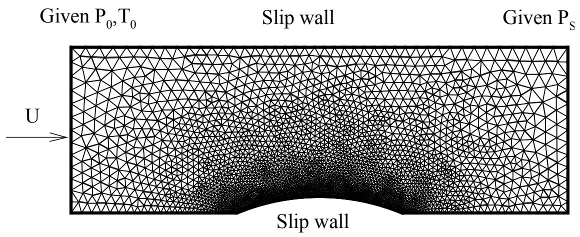
AOA = ۵/۵° و M_{∞} = ۰/۰۰۳ در 30p-30N

در شکل **۱۹** نرخ همگرایی روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک مقایسه شده است. پر واضح است که هر چقدر عدد ماخ پایین‌تر می‌رود و فیزیک حاکم پیچیده‌تر می‌شود، عملکرد ماتریس‌های پیش‌شرطی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد. همچنین کارایی ماتریس پیش‌شرطی ترکل به سمت ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل نزدیک‌تر می‌شود و عملا در اعداد ماخ پایین، پارامتر α بی تاثیر می‌شود و هر

سه روش پیش‌شرطی نرخ همگرایی را به میزان ۸۹٪ نرخ همگرایی را نسبت به روش کلاسیک بهبود می‌دهند. جهت مقایسه روش‌ها عدد کورانت در این تحلیل ۰/۰۳ در نظر گرفته شد.

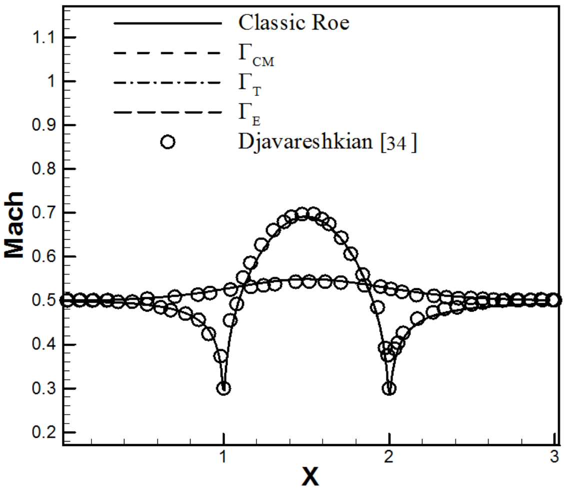
۳-۳- جریان درون کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪

جهت ارزیابی روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک در جریان داخلی، جریان درون یک کانال با برآمدگی ۱۰٪ در اعداد ماخ ۰/۵، ۰/۱ و ۰/۰۰۱ مورد بررسی قرار گرفته‌است. برای این آزمایش، برای جریان ورودی مادون‌صوت، فشار سکون P_0 و دمای سکون مشخص T_0 می‌گردد. در خروجی، فشار استاتیک خروجی معین گردیده و مابقی متغیرها از داخل میدان مشخص می‌گردد. شبکه محاسباتی بهینه شده که در نزدیکی برآمدگی تراکم بیشتری دارد با ۵۹۱۳ سلول و ۳۰۸۲ گره در شکل **۲۰** آورده شده است.

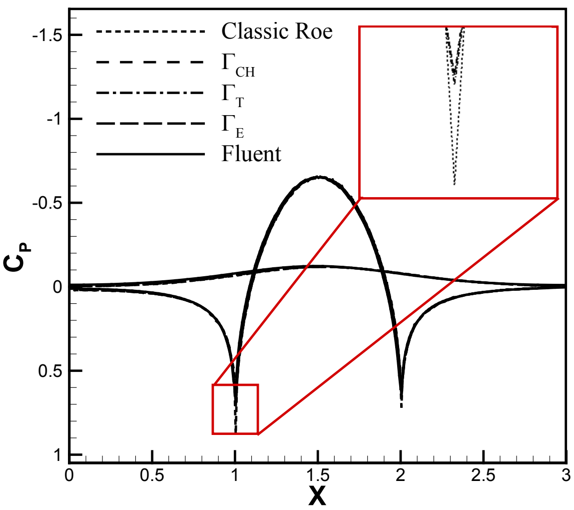


شکل (۲۰) : شبکه محاسباتی برای کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪

جهت اعتبارسنجی نتایج روش‌های پیش‌شرطی و روش کلاسیک برای عدد ماخ ۰/۵، توزیع عدد ماخ بر روی دیواره‌های بالا و پایین کانال با نتایج عددی به‌دست آمده از جوارشکیان [۳۴] در شکل **۲۱** مقایسه گردیده است. نتایج نشان می‌دهند که توزیع عدد ماخ روی سطح برآمدگی برای تمامی روش‌ها، اختلافی نداشته و با نتایج جوارشکیان تطابق خوبی دارد. با کاهش عدد ماخ جریان به مقدار ۰/۱ روش‌های پیش‌شرطی کارایی خود را بیشتر نشان می‌دهد. مقایسه توزیع ضریب فشار با نتایج به‌دست آمده از نرم افزار فلوینت و خطوط هم‌فشار در شکل‌های **۲۲** و **۲۳** ، حاکی از تفاوت ناچیز روش‌های پیش‌شرطی با نتیجه به‌دست آمده از نرم افزار فلوینت می‌باشد. اما در مقایسه با روش کلاسیک در قسمت برآمدگی کانال، جاییکه ناحیه پرفشار محسوب می‌شود، دقت روش کلاسیک به‌علت مقیاس نادرست نوسانات فشاری [۲۶] با کاهش دقت همراه است. روش‌های پیش‌شرطی با اصلاح میدان فشار و ترم میرایی، جواب دقیق‌تری را ارائه می‌دهند.

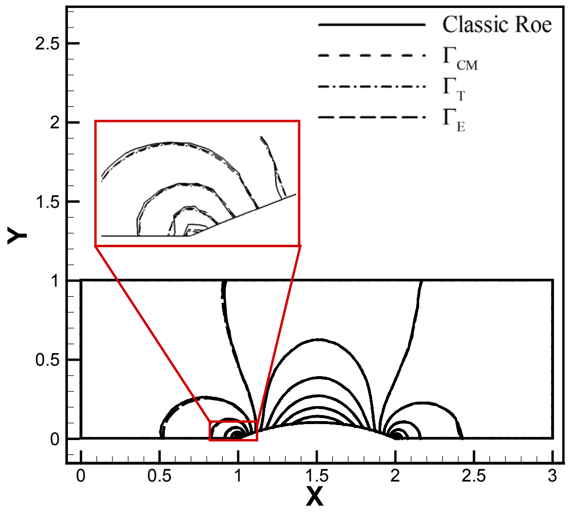


شکل (۲۱) : مقایسه توزیع عدد ماخ بر روی سطح برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty = ۰/۵$

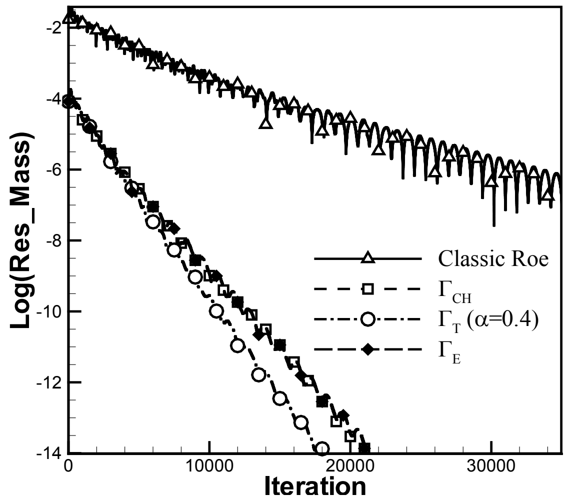


شکل (۲۲) : مقایسه توزیع ضریب فشار بر روی سطح برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty = ۰/۱$

مقایسه نرخ همگرایی در شکل **۲۴** نشان‌دهنده بهبود نرخ همگرایی روش‌های پیش‌شرطی چوی-مرکل و اریکسون به میزان ۷۷٪ نسبت به روش کلاسیک می‌باشد. روش پیش‌شرطی ترکل نیز با انتخاب بهینه پارامتر آزاد ($\alpha = ۰/۴$) میزان نرخ همگرایی را نسبت به روش کلاسیک ۸۱٪ افزایش می‌دهد. عدد کورانت در این محاسبات برای تمامی روش‌ها ۱/۵ در نظر گرفته شد.

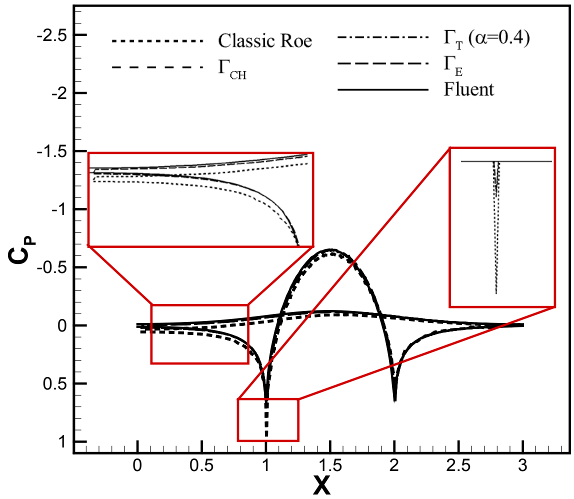


شکل (۲۳) : مقایسه کانتور خطوط هم‌فشار در کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty =$ ۰/۱

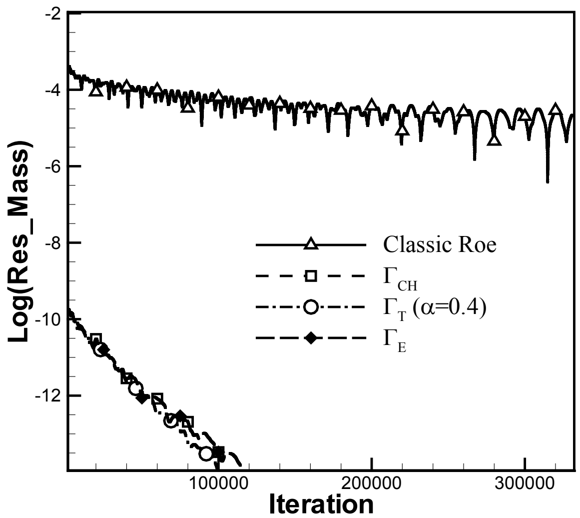


شکل (۲۴) : مقایسه نرخ همگرایی در کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty =$ ۰/۱

در ادامه جهت بررسی عملکرد روش‌های پیش‌شرطی در عدد ماخ خیلی پایین، جریان داخل کانال در عدد ماخ ۰/۰۰۱ مورد آزمایش قرار می‌گیرد. مقایسه توزیع ضریب فشار (شکل **۲۵**) بر روی دیواره‌های بالا و پایین کانال برای روش‌های پیش‌شرطی و مقایسه با خروجی نرم افزار فلوینت، نشان از استقلال توزیع فشار در برابر تغییرات عدد ماخ در جریان تراکم‌ناپذیر است. اما روش کلاسیک با کاهش بیشتر عدد ماخ دقت جواب‌ها به‌علت سختی معادلات، کاهش نرخ همگرایی و مقیاس نادرست فشار با کاهش همراه است. بررسی نرخ همگرایی در جریان داخل کانال در شکل **۲۶** بیان‌گر آن است که روش‌های پیش‌شرطی در ماخ‌های بسیار پایین همانند جریان خارجی علاوه بر بهبود چشمگیر دقت و همگرایی و برطرف کردن مشکلات روش کلاسیک، تقریبا عملکرد مشابه‌ای از نظر نرخ همگرایی با یک‌دیگر دارند و مقدار همگرایی را ۹۸٪ نسبت به روش کلاسیک بهبود می‌دهند.



شکل (۲۵) : مقایسه توزیع ضریب فشار بر روی سطح برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty =$ ۰/۰۰۱



شکل (۲۶) : مقایسه نرخ همگرایی در کانال با برآمدگی دایره‌ای ۱۰٪ در $M_\infty =$ ۰/۰۰۱

۴- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، سه روش پیش‌شرطی ترکل، چوی-مرکل و اریکسون برای جریان‌های با ماخ پایین در حلگر بالادستی

"رو" در شبکه بی‌سازمان به‌کار گرفته شد. ریاضیات مربوط به ترم میرایی، بردارهای ویژه و مقادیر ویژه روش‌های پیش‌شرطی بر حسب متغیرهای بقایی به‌صورت یک‌پارچه ارایه گردید. عملکرد این ماتریس‌های پیش‌شرطی از نظر دقت و نرخ همگرایی در جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم ناپذیر داخلی و خارجی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج زیر حاصل شد.

- روش‌های پیش‌شرطی با اصلاح ترم میرایی روش کلاسیک و همچنین کاهش اختلاف سرعت آکوستیک و سرعت سیال، توانستند عملکرد قابل توجهی از نظر دقت در اعداد ماخ پایین و بسیار پایین نسبت به روش کلاسیک ارایه بدهند.
- دو ماتریس پیش‌شرطی چوی-مرکل و اریکسون در تمامی آزمایش‌ها رفتار مشابه‌ای ارایه دادند. عملکرد این دو ماتریس پیش‌شرطی از نظر نرخ همگرایی در جریان‌های تراکم پذیر و گذرصوتی به‌علت نزدیک شدن پارامتر پیش‌شرطی به مقدار واحد تفاوت ناچیزی با روش کلاسیک ارایه دادند. اما عملکرد این دو ماتریس در جریان‌های تراکم ناپذیر بیشتر قابل توجه بود. به‌طوریکه نرخ همگرایی را در محدوده جریان تراکم‌ناپذیر و اعداد ماخ نسبتا پایین (اعداد ماخ بزرگ‌تر از ۰/۰۱) برای ایرفویل ناکا۰۰۱۲، ایرفویل سه اِلمانه و جریان داخلی بین ۳۹٪ تا ۸۲٪ نسبت به روش کلاسیک بهبود دادند.
- نتایج نشان می‌دهد ماتریس پیش‌شرطی ترکل، در طیف گسترده‌ای از اعداد ماخ جریان خارجی و داخلی، قابلیت افزایش نرخ همگرایی را داراست و این افزایش نرخ همگرایی تابع پارامتر آزاد α است. که مقدار بهینه آن نیازمند تجربه عددی است. استفاده از این پارامتر آزاد، مقدار عدد شرطی را در طیف وسیعی از اعداد ماخ، به مقدار واحد نزدیک می‌کند و به همین دلیل عملکرد بهتری از نظر نرخ همگرایی نسبت به دو روش پیش‌شرطی دیگر ارائه می‌دهد. با استفاده از ماتریس پیش‌شرطی ترکل، نرخ همگرایی برای جریان تراکم‌پذیر حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ به میزان ۳۸٪ و برای جریان تراکم‌ناپذیر و اعداد ماخ نسبتا پایین، برای هر سه آزمایش مربوطه بین ۵۵٪ تا ۸۷٪ نرخ همگرایی را نسبت به روش کلاسیک بهبود داد.
- در محدوده اعداد ماخ بسیار پایین (ماخ کمتر از ۰/۰۱) عملکرد روش‌های پیش‌شرطی به یک‌دیگر نزدیک می‌شود. برای جریان خارجی حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ و ایرفویل سه المانه به‌ترتیب ۳۸٪ و ۸۹٪ بهبود نرخ همگرایی و برای جریان داخلی ۹۸٪ بهبود نرخ همگرایی در انجام محاسبات قابل به دست‌یابی است.

۵- مراجع

1. Chorin, A.J. “A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems”, Journal of Computational Physics, Vol. 2, No. 1, pp. 12-26, 1967.
2. Turkel, E. “Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations”, Journal of Computational Physics, Vol. 72, No. 2, pp. 277-298, 1987.
3. Choi, Y.H. and Merkle, C.L. “The Application of Preconditioning in Viscous Flows”, Journal of Computational Physics, Vol. 105, No. 2, pp. 207-223, 1993.
4. Eriksson, L-E. “A preconditioned Navier-Stokes solver for low Mach number flows.”;Proc. Int, Conf. Eccomas computational fluid dynamics, 1996.
5. Vanleer,B.,Lee, W and Roe, P., “Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations.”;Proc. Int, Conf. Computational Fluid Dynamics ,1991.
6. Hejranfar, K. and Parseh, K.,. “Application of a preconditioned high-order Accurate artificial compressibility-based incompressible flow solver in wide range of Reynolds numbers”. Journal of Numerical Methods in Fluids, 86, pp.46-77,2018.
7. Yildirim, B. and Cinnella, P., “On the validation of a global Preconditioner for the Euler Equations” ;Proc. Int, Conf. AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit ,2004.
8. Bas, O., Tuncer, I.H., and Kaynak, U.“A Mach-Uniform Preconditioner for incompressible and subsonic flows”. Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 74, No. 2, pp.100-112,2014.

9. Bas, O., Cakmakcioglu, S. C., and Kaynak, U. "A Novel Intermittency Distribution Based Transition Model for Low-Re Number Airfoils", ;Proc. Int, Conf. AIAA Applied Aerodynamics, 2013,
10. Darmofal, D.L. and Schmid, P.J. "The Importance of Eigenvectors for Local Preconditioners of the Euler Equations", J. Comput. Phys., Vol. 127, No. 2, pp. 346-362, 1996.
11. Turkel, E., Vatsa, V.N., and Radespiel, R. "Preconditioning Methods for Low-Speed Flows", Proc. Int, Conf. In AIAA. Appl. Aerodynamic. New Orleans ,USA, 1996.
12. Li, X.-s., Gu, C.-w., and Xu, J.-z. "Development of Roe-type Scheme for All-Speed Flows Based on Preconditioning Method", Computers & Fluids., Vol. 38, No. 4, pp. 810-817, 2009.
13. Li, X.-s., Ren, X.-d., and Gu, C.-w. "An Improved Roe Scheme for All Mach-Number Flows Simultaneously Curing Known Problems", Journal for arXiv:1711.09272, 2017.
14. Li, X.-s. and Gu, C.-w. "The Momentum Interpolation Method Based on the Time-Marching Algorithm for All-Speed Flows", Journal of Computational Physics. Vol. 229, No. 20, pp. 7806-7818, 2010.
15. Li, X.-s. and Gu, C.-w. "On the Mechanism of Roe-type Schemes for All-Speed Flows", Journal for open-source arXiv. Vol. 209, No. 20, pp. 7806-7818, 2011.
16. Li, X.-s. "On the All-Speed Roe-type Scheme for Large Eddy Simulation of Homogeneous Decaying Turbulence", Journal for open-source arXiv. Vol. 308, No. 20, pp. 7505-77517, 2015.
17. Ren, X.d., Gu, C.w., and Li, X.s. "Role of the Momentum Interpolation Mechanism of the Roe Scheme in Shock Instability",Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 84, No. 6, pp. 335-351, 2017.
18. Maia, A.A.G., Kapat, J.S.J., Tomita, T., Silva, J. F., Bringhenti, C., and Cavalca, D.F. "Preconditioning Methods for Compressible Flow CFD Codes:, Journal of Mechanical Science*s*. Vol. 186, 2020.
19. Maia, A., Ferreira da Silva, J., Tomita, J., and Bringhenti, C. "Implementing a Preconditioning Technique in A RANS Compressible Code to Accelerate the Convergence Rate for Low-Speed Flows"; Proc. Int. Conf. Mechanical, Chemical, and Material Engineering. Canada, 2019.
20. Maia, A.A., Silva, J.F., Tomita, J.T., and Bringhenti, C. "Applying a Preconditioning Technique to the Euler Equations to Accelerate the Convergence Rate for Low-Speed Flows", Proc. Int. Conf. Mechanical, Chemical, and Material Engineering. Lisbon, Portugal, 2019.
21. Darmofal, D.L. and Siu, K. "A Robust Multigrid Algorithm for the Euler Equations with Local Preconditioning and Semi-coarsening", J. Comput. Phys., Vol. 151, No. 2, pp. 728-756, 1999.
22. Akbarzadeh, P., Askari Lehdarboni, A., and Derazgisoo, S.M. "A New Smoothing Approach for Accelerating the Convergence of Power-Law Preconditioning Method in Steady and Unsteady Flows Simulation", Int. J. Mech. Sci. Vol. 141, pp. 316-329, 2018.
23. Bhatt, M. and Mahesh, K. "A Numerical Approach to Address the Acoustic Stiffness in Cavitating Flows", Journal of Multiphase Flow, Vol.141,No.19,pp.10-35, 2021.
24. Guillard, H. and Viozat, C. "On the Behaviour of Upwind Schemes in the Low Mach Number Limit", Computers & Fluids. Vol. 28, No. 1, pp. 63-86, 1999.
25. Djavareshkian, M.H. "The Role of Flow Limiter Based on Characteristic Variables Via TVD and Pressure_Based Scheme", Proc. Int, Conf. ISME. Iran,Tehran, 2000 (in Persian).
26. Turkel, E., Fiterman, A., and Van Leer, B. "Preconditioning and the Limit to the Incompressible Flow Equations", in NASA Contractor Report 191500, pp. 215-234, 1993.
27. Turkel, E. "Preconditioning Methods for Low-Speed Flows", In 14th Appl. Aerodyn. Conference. New Orleans, LA, U.S.A., 1996.
28. Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E. "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes", AIAA Paper. Vol. 81, 1981.
29. Moukalled, F., Mangani, L., and Darwish, M. "The Characteristic Boundary Condition in Pressure-Based Methods", Numer. Heat Transf. B: Fundam, Vol. 76, pp. 1-17, 2019.
30. "Advisory, Group, for, Aerospace, Research, and Development, Test Cases for Inviscid Flow Field Methods", North Atlantic,USA, 1985.
31. Murayama, M., Nakakita, K., Yamamoto, K., Ura, H., Ito, Y., and Choudhari, M.M. "Experimental Study on Slat Noise from 30P30N Three-Element High-Lift Airfoil at JAXA Hard-Wall Lowspeed Wind Tunnel", Proc. Int. Conf. AIAA Aeroacoustics. Atlanta, USA, 2014.
32. Djavareshkian, M.H. and Reza-zadeh, S. "Application of Normalized Flux in Pressure-Based Algorithm", Computers & Fluids. Vol. 36, No. 7, pp. 1224-1234, 2007