

علمی- پژوهشی

مطالعه تأثیر رویکرد لزجت گردابه‌ای در اصلاح مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی برای پیش‌بینی رفتار بلند مدت معادلات نفوذ-جابجایی

محمد کاظم مویدی^۱ زهره خاکزاری^۲ فرشاد صباغ‌زادگان^۳

آزمایشگاه پژوهشی اتمسفر زمین و علوم فضایی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۲۰

چکیده

در این پژوهش با استفاده از روش تجزیه مودهای دینامیکی و با بهره‌گیری از مفاهیم پایه‌ای سیستم دینامیکی، معادله برگرز لزج به صورت یک مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر داده و فیزیک، تبدیل شده‌است. بر همین اساس، مبتنی بر تصویرسازی معادله حاکم در فضای برداری مودهای میدان، مدل کاهش مرتبه یافته با توجه به ویژگی مودهای اصلی بدست می‌آید. این الگو به منظور شبیه‌سازی تغییرات زمانی سیستم در بازه زمانی بلند می‌تواند دچار ناپایداری شود. از این‌رو از رویکردی مبتنی بر مفهوم لزجت گردابه‌ای برای پایدارسازی رفتار مدل کمک گرفته شده‌است. این اصلاح سبب می‌شود مدل رتبه‌کاسته به درستی بتواند جایگزین معادله اصلی شده و با دقت بسیار مناسبی رفتار سیستم موردنظر را پیش‌بینی کند. مقایسه نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته حاضر با شبیه‌سازی‌های حاصل از حل دقیق، دقت بالا در محاسبات را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مدل رتبه‌کاسته، معادله برگرز لزج، تجزیه مودهای دینامیکی، الگوی لزجت گردابه‌ای

Studying the Effect of Eddy Viscosity Closure on the Calibration of the DMD based Reduced-order Model to Predict the Long-term Behavior of Convection-Diffusion Equations

Moayyedi, M. K.

Khakzari, Z.

Sabaghzadegan, F.

Space Science and Earth Atmosphere Research Lab. Department of Mechanical Engineering
University of Qom

(Received: 29/December /2021; Accepted: 10/May/2022)

ABSTRACT

In this research, using the dynamic modes decomposition and using the basic concepts of the dynamical system, a data driven-physics informed reduced-order model has been developed for the viscous Burgers equation. Accordingly, based on the projection of the governing equation into the modal space, a reduced model is obtained according to the characteristics of the dominant modes. This model when used to simulate the field dynamics over a long time period, may become unstable. Therefore, an approach based on the concept of eddy viscosity closure has been used to stabilize the model behavior. This modification allows the reduced-order model to be a surrogate model of the original equation and predict the time evolution of the dynamical system with relative good accuracy. Comparing the results of the present reduced order model with the data obtained from the direct numerical simulations shows a high computational accuracy.

Keywords: Reduced Order Model, Viscous Burgers Equation, Dynamic Modes Decomposition, Eddy Viscosity Closure.

۱- استادیار بخش مهندسی مکانیک: moayyedi@qom.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی‌ارشد

۳- دستیار پژوهشی

۱- مقدمه

امروزه یکی از مهم‌ترین نیازهای صنعت کاهش زمان محاسبات است که باعث کاهش هزینه‌ها و کوتاه‌تر شدن زمان طراحی می‌شود؛ بنابراین دستیابی به روش‌هایی جهت کاهش حجم محاسبات، کاهش حجم موردنیاز برای ذخیره‌سازی داده‌ها و افزایش زمان بهره‌وری مفید از طرح، از جمله عمده‌ترین بررسی‌های صورت گرفته در دهه‌های اخیر می‌باشد. برای مثال، می‌توان میدان جریان سیال را به‌عنوان یک سیستم دینامیکی که با گذر زمان دچار تغییرات تصادفی می‌شود معرفی کرد. پیشرفت‌های اخیر در زمینه سخت‌افزارهای محاسباتی توانسته تا حدود زیادی زمان محاسبات را کاهش دهد. اما علاقه محققان به بررسی جزئیات بیشتر یک پدیده فیزیکی، باعث افزایش پیچیدگی‌های معادلات حاکم بر مسئله می‌گردد؛ لذا، لزوم دستیابی به یک الگوی سریع و دقیق که قادر به مدل‌سازی مسئله (با هر درجه از پیچیدگی) باشد، همچنان وجود دارد. این مشکلات باعث شده است تا در تحقیق حاضر برای کاهش هزینه‌های محاسباتی مسائل از الگوهای رتبه‌کاسته استفاده گردد. روشی که بیشتر از سایر روش‌ها توسط پژوهشگران این حوزه برای بررسی رفتار سیالات مورد استفاده واقع شده است، روش «تجزیه متعامد بهینه» است. این روش یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای کاهش مرتبه مسئله به شمار می‌رود [۱]. لیگرسلی و همکاران [۲] یک مدل رتبه‌کاسته بر مبنای روش تجزیه متعامد بهینه و به‌منظور طراحی ایرفویل استفاده کرده و با بهینه‌سازی آن را توسعه دادند. در این مقاله یک مدل غیرخطی بر اساس توابع پایه خطی‌سازی شده محاسبه و با بهره‌گیری از کمینه‌سازی تابع هدف تعریف‌شده برای فشار سطحی ایرفویل، شکل هندسی بهینه ایرفویل محاسبه شد. فاگیانو و گاتی [۳] از مدل رتبه‌کاسته برای شبیه‌سازی قوس پلازما در دستگاه‌های توزیع‌کننده استفاده کردند. انصاری و همکاران [۴] نیز با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه موفق به توسعه مدل رتبه‌کاسته‌ای با هدف شبیه‌سازی الکتروشیمیایی باتری سرب-اسید شدند. آن‌ها تغییرات غلظت اسید و ولتاژ باطری را در طی سه مرحله تخلیه، استراحت و شارژ به روش رتبه‌کاسته شبیه‌سازی کردند. آبرو و همکاران [۵] بر روی تجزیه طیفی متعامد بهینه و

تجزیه و تحلیل سازه‌های منسجم نزدیک دیوار در لوله‌هایی با جریان آشفته پژوهشی انجام دادند. مؤیدی و همکاران [۶] از روش تجزیه متعامد بهینه جهت ایجاد الگوی رتبه‌کاسته برای مسائل نفوذ دوبعدی و مسئله نفوذ-جابجایی استفاده کرده‌اند؛ اما در سال‌های اخیر، پژوهشگران با مطالعه بر روی فیزیک سیالات و تعمیم روش آرنولد [۷ و ۸]، موفق به توسعه روشی قدرتمند در راستای تجزیه و تحلیل دینامیک سیستم‌های غیرخطی شدند. این روش که تنها مبتنی بر دسته نمایه‌های ثبت‌شده حاصل از حل عددی دقیق و یا نتایج آزمایشگاهی می‌باشد. ابتدا توسط اشמיד و سسترهن [۹] با هدف استخراج اطلاعات دینامیکی میدان جریان معرفی گردید. رولی و همکاران [۱۰] برای شبیه‌سازی جریان یک جت در مقیاس بزرگ از روش تجزیه موده‌های دینامیکی استفاده کردند. توماس و همکاران [۱۱] با استفاده از روش‌های تجزیه متعامد بهینه و تجزیه موده‌های دینامیکی موفق به استخراج ساختارهای اصلی و حائز اهمیت جریان شبیه‌سازی شده در ناحیه گردابه‌های، اطراف یک قطار در حال حرکت با سرعت بالا شده و به مقایسه این دو روش پرداختند. دوک و همکاران [۱۲] با استفاده از روش تجزیه موده‌های دینامیکی، نرخ رشد ناپایداری جریان را مورد بررسی قرار دادند. سنا [۱۳] نیز با استفاده از این روش جریان درون یک حفره را مورد بررسی قرار داد و موفق به شناسایی موده‌هایی با قابلیت خود نوسانی گردید. لیو [۱۴] نیز با استفاده از این روش به تجزیه و تحلیل اغتشاشات فشاری به وجود آمده توسط جریانی درون یک حفره و با سرعتی معادل سرعت صوت پرداخت. هونگ و همکاران [۱۵] با استفاده از روش تجزیه موده‌های دینامیکی، به کنترل میدان جریان ناپایا درون یک دیفیوزر پرداختند. لی و همکاران [۱۶] از روش تجزیه مود دینامیکی برای جریان عبوری از یک سیلندر مربعی شکل در عدد رینولدز ۲۲۰۰۰ استفاده کردند. سان و همکاران [۱۷] یک جریان ناپایدار بر روی یک توربین بادی دو پره را با استفاده از شبیه‌سازی گردابه‌ای از روش تجزیه مود دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. مؤیدی و همکاران [۱۸] از روش تجزیه مود دینامیکی جهت ایجاد الگوی رتبه‌کاسته برای مسئله نفوذ حرارتی دوبعدی و ناپایا استفاده کرده‌اند و با استفاده از شبیه‌سازی در مدت‌زمان بلند به ازای یک ضریب نفوذ مشخص یا در یک بازه زمانی کوتاه، اثرگذاری ضریب

منظور برای محاسبه ترم غیرخطی از روش بالادست مرتبه اول:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & \text{if } (u_i > 0) \\ u_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & \text{if } (u_i < 0) \end{cases} \quad (2)$$

و برای ترم خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3)$$

همچنین برای انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم استفاده شده است. صحت‌سنجی کد حل عددی مستقیم با نتایج مرجع انجام شده و نشان‌دهنده دقت قابل‌قبول داده‌های حاصل از آن می‌باشد [۲۰].

۴- تجزیه مودهای دینامیکی و الگوریتم پردازش داده‌ها

روش تجزیه مودهای دینامیکی در سال ۲۰۰۸ توسط اشמיד پیشنهاد شد. این روش قدرتمند که مبتنی بر داده می‌باشد، به‌عنوان روشی برای تعیین ساختارهای اصلی و سازنده مانند میدان جریان سیال معرفی شده است. مدت کوتاهی پس از معرفی این روش، رولی و همکاران [۱۰] به‌عنوان یک تکنیک عددی برای تخمین عملگر کوپمن و ایجاد یک اتصال قوی به تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی پرداختند. برخلاف دیگر تکنیک‌های کاهش ابعاد، مانند تجزیه متعامد بهینه، این روش برای استخراج مودهای متجانس از نظر مکانی، نوسان در فرکانس ثابت و رشد یا واپاشی در نرخ ثابت طراحی شده است؛ بنابراین، تجزیه مود دینامیکی مجموعه‌ای از حالت‌ها را همراه با یک مدل تکامل خطی ارائه می‌دهد. از زمانی که روش تجزیه مود دینامیکی معرفی شد به‌طور گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله اپیدمیولوژی، علوم اعصاب، رباتیک و پردازش تصویر مورد استفاده قرار گرفته است. در واقع، این روش قادر به بررسی و تجزیه و تحلیل ساختار سیستم‌های پیچیده و غیرخطی بوده و امکان شناسایی نواحی از میدان با رفتارهای دینامیکی مختلف را دارد. این روش با تجزیه سیستم‌های پیچیده به یک سری از مودها که هر یک دارای

نفوذ در میدان مسئله را پیش‌بینی کردند. مؤیدی و همکاران [۱۹] با استفاده از روش رتبه‌کاسته اصلاح‌شده مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه، جریان‌های ناپایای تراکم‌ناپذیر را شبیه‌سازی کردند. با استفاده از مدل پیشنهادی آن‌ها، می‌توان با دقتی مناسب و سرعتی بالا تغییرات زمانی میدان جریان را پیش‌بینی کرد.

در این مقاله، به بررسی دو مسئله به‌صورت مستقل از یکدیگر پرداخته خواهد شد. در مسئله اول معادله برگرز لزج با استفاده از شبیه‌سازی عددی حل شده و در مسئله دوم، حل آن با استفاده از مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی انجام شده است. ویژگی اصلی این مقاله، توسعه مدل رتبه‌کاسته با بهره‌گیری از اعمال ترم استهلاک مشابه با مفهوم لزجت گردابه‌ای در جریان‌های آشفته، به‌منظور اصلاح عملکرد مدل می‌باشد؛ همچنین بررسی تأثیر این رویکرد در پیش‌بینی دینامیک مسئله موردنظر برای بازه زمانی خارج از محدوده نمایه‌های^۱ به‌کاررفته به‌منظور آموزش مدل، نیز ارزیابی شده است. تفاوت این پژوهش با سایر کارهای پیشین مطالعه اثر اصلاح اعمال شده روی مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر داده و فیزیک، برای پیش‌بینی رفتار مسئله در بازه زمانی بلند می‌باشد. نتایج نشان‌دهنده دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته برای مدل‌سازی معادلات نفوذ-جابجایی می‌باشد.

۲- معادلات حاکم

معادله برگرز یک معادله دیفرانسیل جزئی بوده که با حذف عبارت فشار در معادله ناویر-استوکس برای اجتناب از پیچیدگی‌های ناشی از کوپلینگ میدان سرعت و فشار به دست می‌آید. این معادله در حالت بدون بعد به‌صورت رابطه (۱) خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (1)$$

۳- شبیه‌سازی عددی مستقیم

برای به دست آوردن نمایه‌ها از داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم معادله برگرز لزج استفاده شده است. بدین

¹ Snapshots

با فرض اینکه داده‌های ورودی از شبیه‌سازی عددی مستقیم حاصل شده باشند باید ماتریس A برای تکامل معادلات به دست آید. حال با استفاده از نگاشت خطی، بین ماتریس داده‌های لحظه‌ای اول، V_1^{N-1} و مجموعه دوم V_2^N رابطه زیر برقرار خواهد شد:

$$V_2^N = AV_1^{N-1} \quad (7)$$

ماتریس نگاشت A ، ماتریسی فرضی است که شامل اطلاعات تکامل تدریجی سیستم است و در طول زمان ثابت می‌باشد. برای برقراری رابطه (۷)، باید عبارت به ماتریس A ، متکی نباشد. اگر ماتریس غیرمربعی V_1^{N-1} با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین، تجزیه شود، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$V_1^{N-1} = U\Sigma W^T \quad (8)$$

در نتیجه:

$$V_2^N = AU\Sigma W^T \quad (9)$$

با ضرب U^T و $W\Sigma^T$ در طرفین رابطه (۹)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = U^T AU\Sigma W^T W\Sigma^{-1} = U^T V_2^N W\Sigma^{-1} \quad (10)$$

گفتنی است ماتریس شبه معکوس ماتریس Σ به صورت Σ^{-1} نمایش داده شده است. به دلیل آن که ماتریس Σ^{-1} برخلاف $W^T W$ ، غیرمربعی است پس دارای مقادیر صفر و یک می‌باشد. مقادیر ویژه ماتریس A و S با هم برابر بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Sy_i = \mu_i y_i \quad i = 1, \dots, M \quad (11)$$

در این رابطه y_i ، بیانگر بردار ویژه و μ_i مقادیر ویژه ماتریس S هستند؛ بنابراین مودهای مکانی به دست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\phi_i = Uy_i \quad (12)$$

$$A\phi_i = \mu_i \phi_i$$

مودهای دینامیکی (وابسته به زمان) با نگاشت لگاریتمی مقادیر ویژه طبق رابطه زیر به دست خواهند آمد:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{dt} \quad (13)$$

جنبه متفاوتی از رفتار دینامیکی سیستم هستند، عمل می‌کند؛ اما نکته حائز اهمیت آنجاست که تجزیه سیستم به یک سری از مودها، باعث شناسایی مودهای اصلی که تشکیل‌دهنده رفتار دینامیکی سیستم هستند، خواهد شد. حال این امکان فراهم می‌آید تا با انتخاب این مودها و جداسازی آن‌ها از دیگر مودها که کم‌اهمیت هستند، سیستم اصلی به صورت دقیق بازسازی شود. همچنین با استفاده از این مودهای دینامیکی می‌توان رفتار سیستم در آینده را نیز پیش‌بینی کرد. یکی از مزیت‌های استفاده از این روش نسبت به سایر روش‌ها این است که در برخی از مسائل، نیازی به دانش درباره معادله حاکم بر سیستم ندارد. تجزیه مود دینامیکی ممکن است به‌عنوان شکلی از شناسایی سیستم در نظر گرفته شود که منجر به کاهش مرتبه‌ای مدل‌ها شود. روش تجزیه مود دینامیکی یک سری تفاوت و شباهت با روش تجزیه متعامد بهینه دارد. شباهت این دو روش در این است که با توجه به یک سری بردار ویژه و مقادیر ویژه عمل می‌کنند. اختلافی که این دو روش با هم دارند در این است که در روش تجزیه متعامد بهینه بردارهای ویژه حاصل (مودها) از لحاظ سطح انرژی طبقه بندی می‌شوند. در روش تجزیه مود دینامیکی مجموعه‌ای از مودها محاسبه می‌شود که هر کدام به یک فرکانس نوسان ثابت و نرخ رشد یا اتلاف در سیستم دینامیکی موردنظر مرتبط هستند. در این روش مودها دارای وزن مشخصی بوده و وزن آن‌ها تابعی از مقادیر ویژه هستند. برای استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی، به دنباله‌ای از داده‌ها که به صورت مجموعه‌ای از نمایه‌ها یا تصاویر لحظه‌ای از میدان مرتب می‌شوند، نیاز است. هر نمایه شامل یک شبکه محاسباتی دارای گره بوده که در قالب بردار مرتب خواهند شد. حال اگر به تعداد نمایه ثبت شود، سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با سطر و ستون مرتب خواهد شد:

$$V_1^N = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \quad (4)$$

در رابطه فوق، v بردار بیانگر میدان جریان در لحظه t ، است. سپس در ماتریس‌های V_1^{N-1} و V_2^N به ترتیب آخرین نمایه و اولین نمایه حذف می‌شوند:

$$V_1^{N-1} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}] \quad (5)$$

$$V_2^N = [v_2, v_3, v_4, \dots, v_N] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \phi_i(x) \times \sum_1^N \frac{d}{dt}(a^i(t)) - \\ & \bar{u} \times \sum_1^N a^i(t) \times \nabla \phi_i(x) - \\ & \bar{u} \times \nabla \bar{u} - \sum_1^N a^i(t) \times (\bar{u}, \nabla \phi_i(x)) - \\ & \sum_{i=j=1}^N a^i(t) \times a^j(t) \times (\phi_i(x), \nabla \phi_j(x)) = \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \bar{u} + \sum_1^N a^i(t) \times \nabla^2 \phi_i(x))$$

اگر طرفین رابطه فوق در مزدوج ترانهاده موده‌های دینامیکی ضرب شوند، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & (\phi_k^H(x), \phi_i(x)) \times \sum_1^N \frac{d}{dt}(a^i(t)) - \\ & (\phi_k^H(x), \bar{u}, \nabla \phi_i(x) + \phi_i(x), \nabla \bar{u}) \times a^i(t) - \\ & (\phi_k^H(x), \bar{u}, \nabla \bar{u}) - \\ & (\phi_k(x), \phi_i(x), \nabla \phi_j(x)) \times a^i(t) \times a^j(t) \\ & = \frac{1}{\text{Re}} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \bar{u}) + \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \phi_i(x)) \times a^i(t) \end{aligned} \quad (19)$$

در رابطه فوق ϕ_k^H مزدوج ترانهاده موده‌های دینامیکی است. در روش تجزیه متعامد بهینه، مودها نسبت به یکدیگر دارای تعامد هستند و با استفاده از روش تجزیه مقدار تکین، در نهایت ضریب بخش گذرا با رابطه دلتای کرونگر ساده‌سازی می‌شود؛ اما در روش تجزیه مود دینامیکی، همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، مودها دارای تعامد نیستند، پس یک پایه الحاقی شبه متعامد لازم است تا در طرفین رابطه (۱۹) به صورت ماتریسی ضرب شود. این پایه الحاقی به صورت رابطه (۲۰) می‌باشد:

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x}))^{-1} \quad (20)$$

از آنجایی که ضرایب معادله نسبت به زمان ثابت فرض شده است، پس می‌توان به رابطه (۲۱) دست یافت:

$$\frac{da^k}{dt} = \tilde{A}_{kij} \times a^i \times a^j + \tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k \quad (21)$$

به طوری که:

با استفاده از محاسبه ضرایب زمانی و موده‌های مکانی، یک بسط خطی تقریب زده می‌شود. این عمل با تصویرسازی هر یک از موده‌های در اولین نمایه طبق رابطه زیر انجام می‌شود:

$$a_i = \phi_{ij}^t v_{1j} \quad (14)$$

در رابطه فوق، ϕ^t شبکه معکوس ماتریس موده‌های دینامیکی است. به منظور بازسازی هر یک از نمایه‌های اولیه از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$V_k = \sum_i^M a_i \phi_i \mu_i^{k-1} \quad (15)$$

در رابطه فوق، k شمارنده زمانی، μ_i مقدار ویژه و V_k نمایه ثبت‌شده در زمان است. در روش استفاده شده در این مقاله، برخلاف روش تجزیه متعامد بهینه، موده‌های حاصل از ماتریس نمایه‌ها که برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته بکار می‌روند، از نمودار آبشار انرژی پیروی نمی‌کنند. موده‌های روش تجزیه مود دینامیکی دارای خاصیت تعامد نبوده و دارای ویژگی مستقل خطی نیز نیستند.

۵- مدل رتبه‌کاسته حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی

به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته، کمیت حاکم بر دینامیک مسئله به صورت یک حاصل جمع از بخش متوسط‌گیری شده زمانی و بخش اغتشاشی نوشته می‌شود:

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + u'(x, t) \quad (16)$$

بخش اغتشاشی را می‌توان بر اساس تقریب گالرکین به صورت رابطه (۱۷) نوشت:

$$u'(x, t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x) \quad (17)$$

در این رابطه، ϕ_i پایه‌های دلخواه (مانند موده‌های دینامیکی مکانی) و a^i ضرایب زمانی هستند. این مقادیر باید طوری انتخاب شوند که معادله دیفرانسیل را با تقریب خوبی ارضا کنند. با جایگذاری روابط مربوط به بخش متوسط و اغتشاشی میدان لحظه‌ای در رابطه (۱۷)، معادله زیر به دست می‌آید:

حذف شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه سازی جریان های آشفته برای مدل سازی ساختارهای متجانسی که سطح انرژی پایین تری دارند، استفاده شود. ضریب مورد نظر برای پایدار سازی مدل رتبه کاسته به ازای مقادیر متفاوت عدد رینولدز متغیر بوده اما به طور کلی در این مقاله مقدار آن ثابت فرض شده است. این ترم مشابه عبارت نفوذ در معادله اصلی بوده و پس از اعمال تجزیه رینولدز و بسط گالرکین و سپس تصویر سازی در فضای مودال به صورت روابط زیر برای بخش متوسط و اغتشاشی نمایه ها تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} B_k^2 &= \langle \nu_e \nabla^2 \bar{u}, \phi_k \rangle \\ B_{ki}^1 &= \langle \nu_e \nabla^2 \phi_i; \phi_k \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

در روابط فوق، ν_e ضریب لزجت گردابه ای می باشد. همان طور که در صورت عبارات مشخص است یکی از آن ها در عبارت ثابت مدل رتبه کاسته لحاظ شده و دیگری در ترم خطی مدل بکار می رود. هدف اصلی این الگو ارائه یک طرح پایدار با حفظ دقت مناسب است که بر این اساس یک لزجت مصنوعی را در بالاترین فرکانس ها اضافه می کند؛ بنابراین، طبق این روش مقدار انرژی لازم برای پایداری سیستم تأمین شده و مقادیر به دست آمده از مدل سازی در اعداد رینولدز بالا پاسخ مناسبی خواهند داشت. با بکار بردن عبارتهای موجود در معادله (۲۲)، مدل رتبه کاسته اصلاح شده، مطابق معادله (۲۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{da^k}{dt} &= \tilde{A}_{kij} \times a^i \times a^j + \tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k \\ \tilde{B}_{ki} &= \tilde{B}_{ki} + B_{ki}^1 \\ \tilde{C}_k &= \tilde{C}_k + B_k^2 \end{aligned} \quad (23)$$

۷- نتایج و بحث

در این بخش به ارائه نتایج حاصل از حل عددی مستقیم و مدل سازی رتبه کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی پرداخته شده است. در ابتدا معادله برگز لزج با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم حل شده و سپس با استفاده از مدل رتبه کاسته، الگویی جایگزین برای معادله حاکم بر مسئله ایجاد شده است. شبیه سازی عددی مستقیم معادله

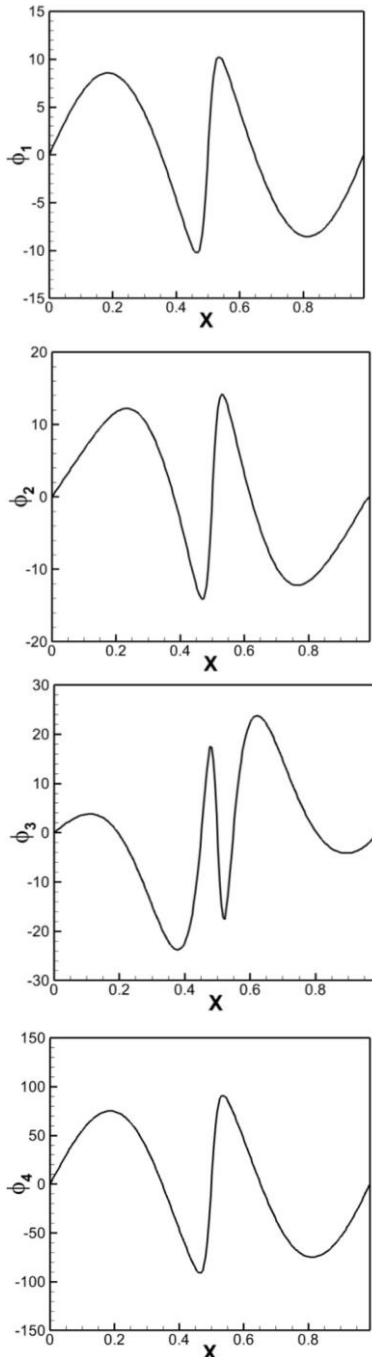
$$\begin{aligned} \tilde{A}_{kij} &= \phi^{ad} \times A_{kij} & \tilde{B}_{ki} &= \phi^{ad} \times B_{ki} \\ \tilde{C}_k &= \phi^{ad} \times C_k \end{aligned}$$

مدل حاصل به صورت معادله یک سیستم دینامیکی است و برای محاسبه ضرایب مودال در گام های زمانی مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. در صورتی که ضرایب مودال یا همان مودهای زمانی مدل دینامیکی حاصل از تصویر سازی در فضای برداری مودها محاسبه شود، می توان رابطه گسسته سازی شده ای برای سیستم دینامیکی پیش بینی کرد.

۶- پایدار سازی مدل رتبه کاسته با بهره گیری از روش لزجت گردابه ای مصنوعی

مدل رتبه کاسته باید علاوه بر داشتن پاسخ نزدیک به پاسخ سیستم اصلی، سه شرط را نیز باید داشته باشد: اول اینکه خطای تقریب کوچک بوده و خطای کلی محدود باشد. شرط دوم اینکه سیستم رتبه کاسته خواص پایداری و انتقال پذیری سیستم اصلی را حفظ کند و در نهایت، از نظر محاسباتی سریع و مقرون به صرفه است. از روش تجزیه مقادیر تکین و روش های کرایلوف برای کاهش مرتبه یک سیستم می توان استفاده کرد. روش های بر پایه تجزیه مقادیر تکین محدود بودن خطا، پایداری و انتقال پذیری را دارند ولی به لحاظ محاسباتی مقرون به صرفه نیستند. روش های کرایلوف در مقایسه با روش های بر پایه تجزیه مقادیر تکین به لحاظ محاسباتی مقرون به صرفه بوده اما از دقت بالایی برخوردار نمی باشند. مدل مورد مطالعه در مقاله حاضر، در صورتی که سیستم در حالت های اولیه و با مقادیر عدد رینولدز پایین قرار داشته باشد، نتایج به دست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل سازی رتبه کاسته بر هم منطبق بوده و نتایج به درستی به دست می آیند؛ اما با افزایش عدد رینولدز، اثر ترم لزج موجود در معادله کاهش می یابد؛ بنابراین استهلاک سیستم دینامیکی رتبه کاسته کم شده و ممکن است در پیش بینی دینامیک مسئله مورد نظر دچار ناپایداری شود. در این مقاله به منظور اصلاح این ناپایداری و جبران استهلاک از دست رفته برای رسیدن مجدد سیستم به پایداری، یک ترم لزجت گردابه ای مصنوعی به معادله سیستم دینامیکی افزوده می شود. همچنین این عبارت می تواند به عنوان جایگزین اثر مودهای

همان‌طور که در شکل مشخص است دقت داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با حل عددی مستقیم در زمان‌های مختلف قابل قبول می‌باشد.



شکل (۱). توزیع مدهای دینامیکی حاصل از نمایه‌های

حل معادله برگرز در عدد رینولدز ۱۰۰

۲-۷- انتگرال گیری از مدل رتبه‌کاسته برای بازه زمانی بلند

حال انتظار می‌رود به‌منظور توسعه مدلی برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی مسئله موردنظر، الگوی حاصل بتواند

برگرز به ازای اعداد رینولدز ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ انجام شده و برای این مدل‌سازی از شرایط اولیه به‌صورت:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad (24)$$

و شرایط مرزی به شرح زیر بهره برده شده است:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (25)$$

ماتریس نمایه‌ها با استفاده از داده‌های حاصل از حل عددی دقیق معادله، ایجاد شده و شامل یک دسته نمایه مشتمل بر ۱۰۰ عضو می‌باشد. سپس با استفاده از روش تشریح‌شده در بخش ۳، مدهای دینامیکی محاسبه شده‌اند. شکل (۱) توزیع چهار مود دینامیکی به ازای عدد رینولدز ۱۰۰ را نمایش می‌دهد. مدل رتبه‌کاسته توسعه‌یافته در این پژوهش برای تمامی اعداد رینولدز موردبحث با استفاده از ۱۰ مود ایجاد شده که در شکل ۱، چهار مود اول در عدد رینولدز ۱۰۰ آورده شده است. لازم به ذکر است مدهای حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی نسبت به یکدیگر برتری سطح انرژی ندارند در نتیجه می‌توان حتی با استفاده از این ۴ مود نیز میدان موردنظر را بازسازی کرد.

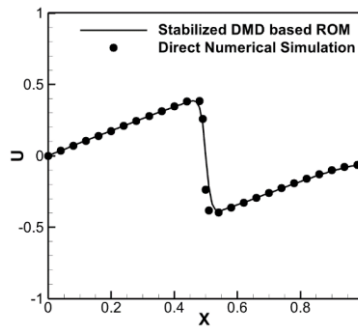
۷-۱- انتگرال گیری از مدل رتبه‌کاسته برای بازه زمانی کوتاه

در این بخش نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته برای شرایطی که داده‌های لازم برای آموزش مدل به‌صورت کامل (تمام آرایه‌های ماتریس نمایه‌ها) بکار می‌رود، ارائه خواهد شد. در این شرایط مدل رتبه‌کاسته با استفاده از ۱۰۰ نمایه و برای بازه‌ای معادل یک واحد زمانی آموزش داده می‌شود. برای این حالت مدل رتبه‌کاسته با بهره‌گیری از ۱۰ مود بازسازی شده و انتگرال گیری برای ۱۰۰۰ گام زمانی با اندازه ۰/۰۰۱ انجام گرفته است. شکل ۲ مقایسه پاسخ معادله برگرز در زمان $t=1s$ حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم به ازای اعداد رینولدز ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ را نشان می‌دهد. به‌منظور بررسی رفتار مدل در گام‌های زمانی مختلف، تغییرات پاسخ مدل رتبه‌کاسته معادله برگرز در یک نقطه مکانی مشخص ($x=0/75$) با داده‌های حاصل از حل عددی دقیق مقایسه شده که نتایج آن در شکل ۳ نشان داده شده است.

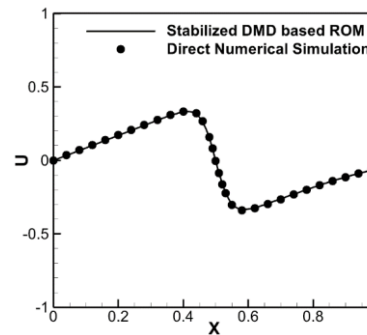
مسئله را پیش‌بینی کند. در شکل ۶ مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح‌شده و داده‌های حل دقیق در حالتی که دسته نمایه مورد استفاده تنها ۲۷ نمایه از ۱۰۰ نمایه اصلی را دارد، انجام شده است. این مقایسه برای آخرین گام زمانی در دسته نمایه اصلی معادل با زمان $(t=1s)$ ، صورت گرفته و به‌خوبی دقت مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده به ازای اعداد رینولدز مختلف، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۵۰۰۰ در قیاس با داده‌های حل دقیق را نمایش می‌دهد. روشن است در این شرایط مدل رتبه کاسته برای انتگرال‌گیری زمانی در بازه بلند بکار گرفته شده است. در شکل ۷ نیز مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم در بازه زمانی بلند، برای چهار عدد رینولدز مختلف انجام گرفته است. در این مدل ۳۵ نمایه برای آموزش مدل رتبه کاسته استفاده شده است. در این شرایط نیز مقایسه در آخرین گام زمانی (مربوط به دسته نمایه اصلی) انجام گرفته و مشخص است که دقت مدل در پیش‌بینی داده‌های میدان موردنظر خارج از بازه زمانی که برای آموزش مدل بکار رفته، قابل قبول می‌باشد. همچنین تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0/75$ حاصل از حل دقیق و مدل‌سازی رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، در شرایطی که دسته نمایه‌ای با ۲۷ عضو برای آموزش مدل بکار رفته و به ازای اعداد رینولدز مختلف در شکل ۸، مقایسه شده‌اند. در شکل ۹، برای نقطه‌ای در موقعیت مشابه شکل ۸، نتایج حاصل از حل دقیق و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده‌ای که با استفاده از دسته نمایه‌ای با ۳۵ عضو آموزش داده شده و برای اعداد ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ مقایسه شده‌اند. نتایج نمایش داده شده در شکل‌های ۸ و ۹ نیز مشابه نتایج دیگر، به‌خوبی دقت مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در پیش‌بینی رفتار دینامیکی مسئله موردنظر و در بازه‌های زمانی بیش از محدوده‌ای که برای آموزش مدل رتبه‌کاسته بکار رفته است را اثبات می‌کند.

به‌عنوان جایگزینی برای معادله حاکم اصلی در بازه‌های زمانی متفاوت و به ازای تغییرات پارامتر مهمی چون عدد رینولدز به کار رود. بدین منظور از دسته نمایه اصلی در دو حالت و به ازای ۲۷ و ۳۵ عضو، دسته نمایه‌های جدیدی ایجاد شده است. از این دسته نمایه‌های جدید به‌منظور آموزش مدل رتبه‌کاسته چه در فرم استاندارد و چه اصلاح شده استفاده شده است. بدین ترتیب در حالت اول ۷۳ درصد زمان کل (۱ ثانیه) و در حالت دوم ۶۵ درصد زمان کل به‌منظور آزمایش دقت مدل رتبه‌کاسته بکار خواهد رفت. روشن است این بازه‌های زمانی در فرآیند آموزش مدل لحاظ نشده و به‌خوبی می‌تواند دقت مدل رتبه کاسته در پیش‌بینی داده‌های میدان موردنظر را نشان دهد.

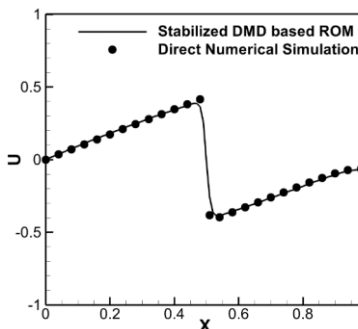
در ابتدا به ارائه نتایج مدل رتبه‌کاسته استاندارد به‌منظور بررسی عملکرد آن در پیش‌بینی دینامیک مسئله موردنظر پرداخته خواهد شد. بدین منظور تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0/75$ حاصل از حل دقیق و مدل رتبه‌کاسته استاندارد (اصلاح‌نشده)، در شرایطی که دسته نمایه‌ای با ۲۷ عضو برای آموزش مدل بکار رفته و به ازای اعداد رینولدز مختلف در شکل ۴ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در نتایج نمایش داده‌شده دیده می‌شود دقت مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با داده‌های حل عددی مستقیم به ازای اعداد رینولدز بالاتر کاهش یافته و به‌خوبی دینامیک حاکم بر مسئله را پیش‌بینی نکرده است. این موضوع با پیش‌روی در زمان تشدید شده و مدل در اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ در زمان‌های خارج از بازه زمانی آموزش مدل رتبه‌کاسته، داده‌هایی بسیار متفاوت از مقادیر حاصل از حل عددی دقیق را نتیجه می‌دهد. در شکل ۵، برای نقطه‌ای در موقعیت مشابه شکل ۴، نتایج حاصل از حل دقیق و مدل رتبه‌کاسته استاندارد (اصلاح‌نشده) که با استفاده از دسته نمایه‌ای با ۳۵ عضو آموزش داده شده، برای اعداد ۱۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در نتایج نمایش داده‌شده دیده می‌شود در این شرایط نیز دقت مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با داده‌های حل عددی مستقیم به ازای اعداد رینولدز بالاتر و گام‌های زمانی بیشتر کاهش یافته و نتوانسته به‌خوبی دینامیک حاکم بر



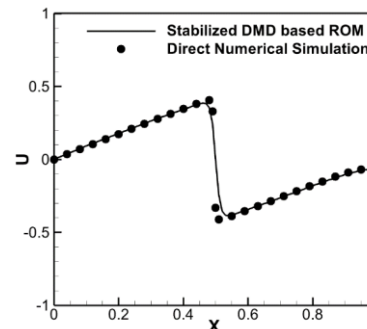
(ب)



(الف)

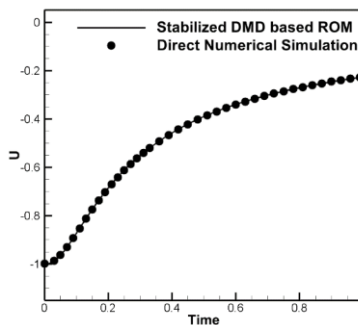


(د)

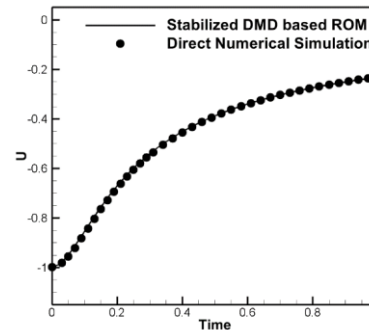


(ج)

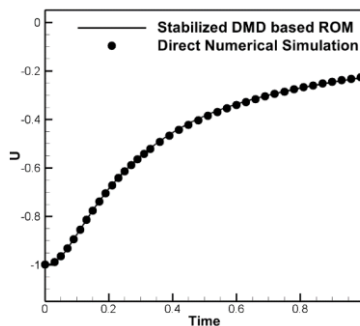
شکل (۲). مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1s$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، (مدل به ازای تمام بازه زمانی آموزش داده شده) برای اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰، (د) ۵۰۰۰



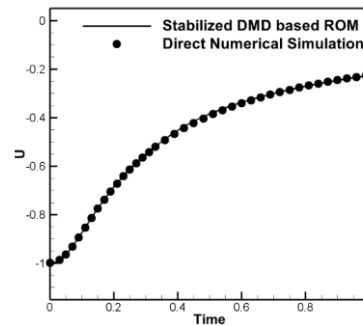
(ب)



(الف)

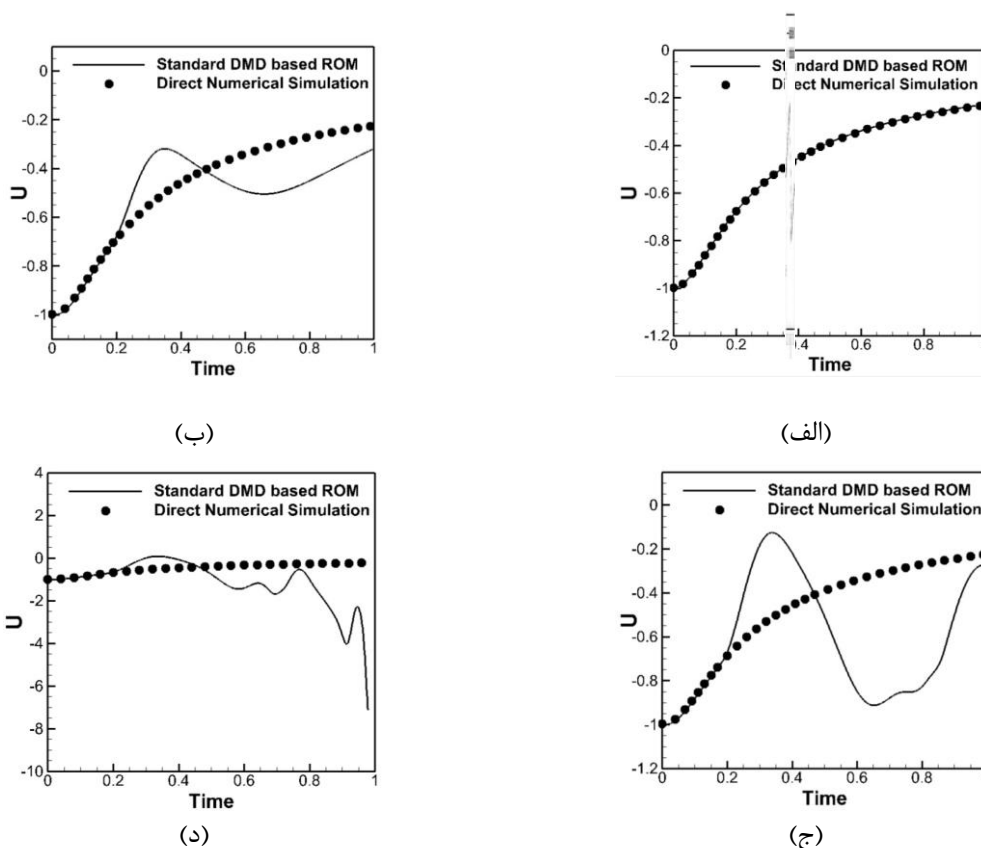


(د)

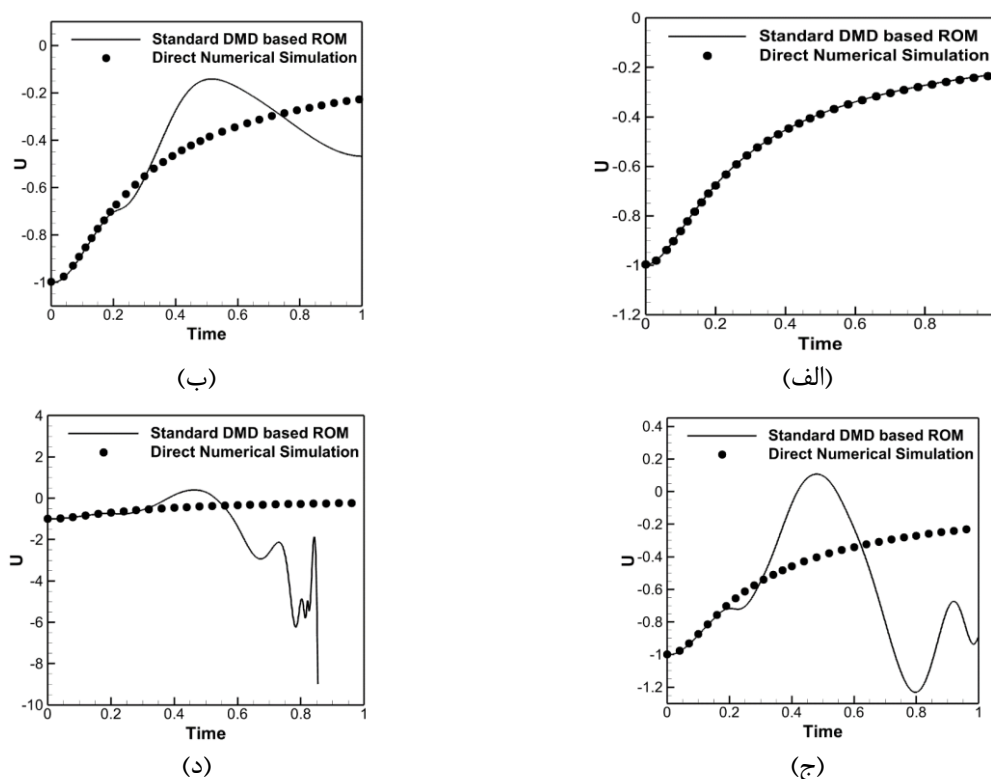


(ج)

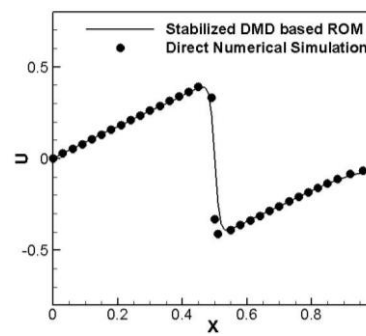
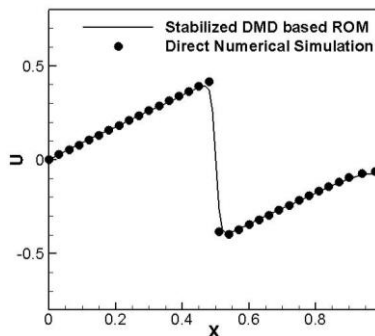
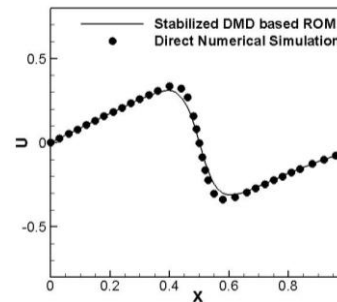
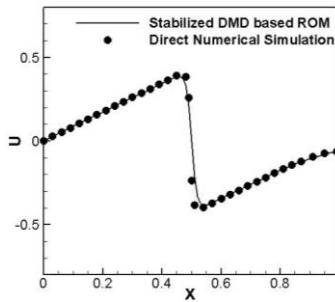
شکل (۳). مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰، (د) ۵۰۰۰



شکل (۴). مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $X=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد (اصلاح‌نشده)، (مدل به ازای ۲۷٪ بازه زمانی آموزش داده شده) به ازای اعداد رینولدز الف) ۱۰۰، ب) ۱۰۰۰، ج) ۲۰۰۰، و د) ۵۰۰۰



شکل (۵). مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $X=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد (اصلاح‌نشده)، (مدل به ازای ۳۵٪ بازه زمانی آموزش داده شده)، به ازای اعداد رینولدز الف) ۱۰۰، ب) ۱۰۰۰، ج) ۲۰۰۰، و د) ۵۰۰۰

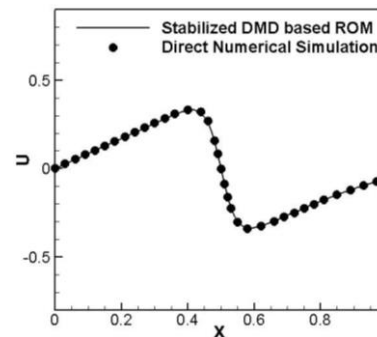
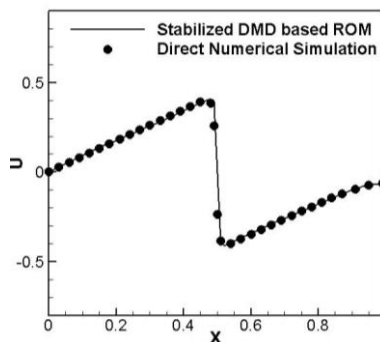


(د)

(ج)

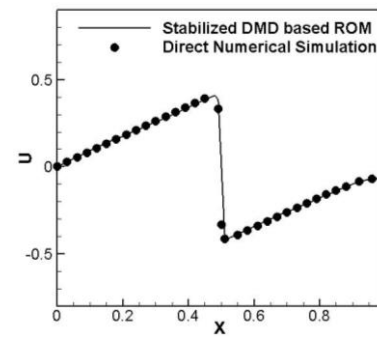
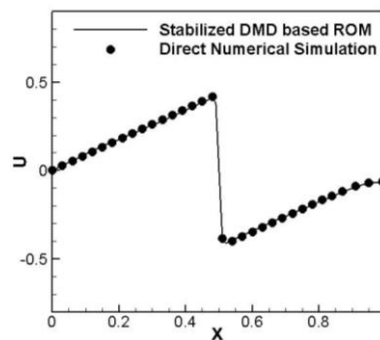
شکل (۶). مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t = 1s$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، (مدل به

ازای ۲۷٪ کل بازه زمانی آموزش داده شده) به ازای اعداد رینولدز الف) ۱۰۰، ب) ۱۰۰۰، ج) ۲۰۰۰، و د) ۵۰۰۰



(ب)

(ف)

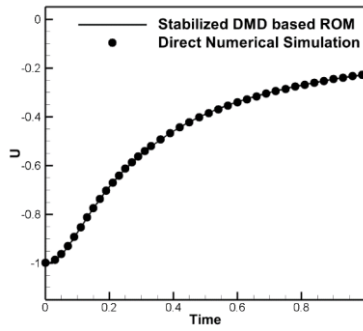


(د)

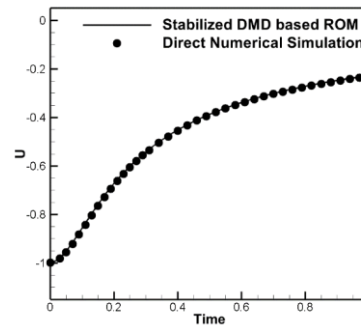
(ج)

شکل (۷). مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t = 1s$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، (مدل

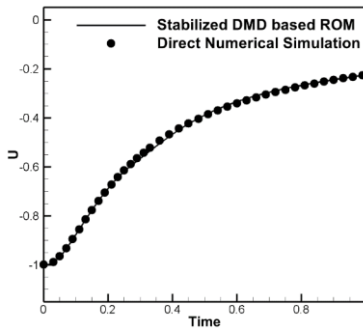
به ازای ۳۵٪ بازه زمانی آموزش داده شده) به ازای اعداد رینولدز الف) ۱۰۰، ب) ۱۰۰۰، ج) ۲۰۰۰، و د) ۵۰۰۰



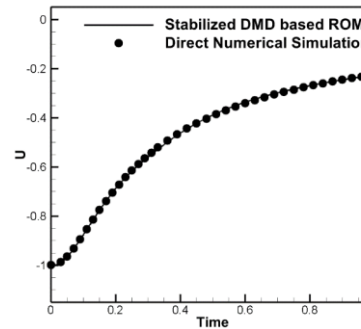
(ب)



(الف)

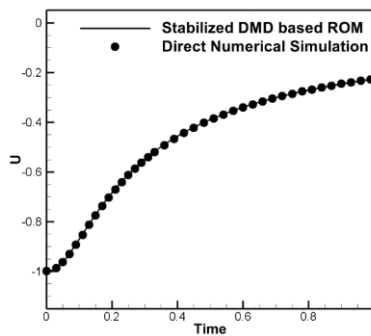


(د)

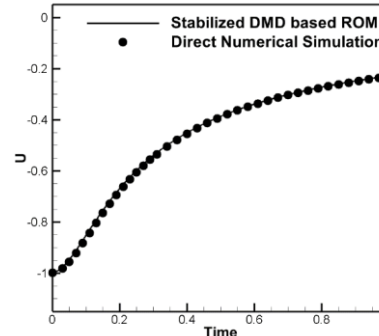


(ج)

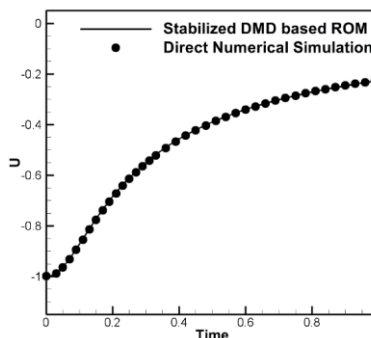
شکل (۸). مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، (مدل به ازای ۲۷٪ بازه زمانی آموزش داده شده)، به ازای اعداد رینولدز الف) ۱۰۰، ب) ۱۰۰۰، ج) ۲۰۰۰، و د) ۵۰۰۰



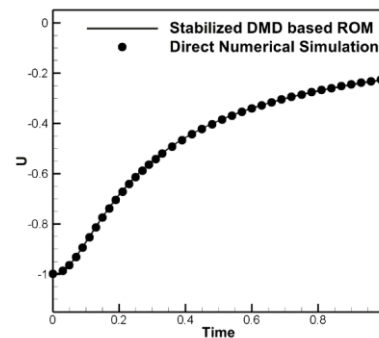
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل (۹). مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، (مدل به ازای ۳۵٪ بازه زمانی آموزش داده شده)، به ازای اعداد رینولدز الف) ۱۰۰، ب) ۱۰۰۰، ج) ۲۰۰۰، و د) ۵۰۰۰

58-78, 2016.

4. Esfahanian, V., Ansari, A. B., and Torabi, F. "Simulation of Lead-Acid Battery Using Model Order Reduction," *J. Power. Sources*. Vol. 279, pp. 246-305, 2015.
5. Abreu, L. I., Cavalieri, A. V. G., Schlatter, P., Vinuesa, R., and Henningson, D. S. "Spectral Proper Orthogonal Decomposition and Resolvent Analysis of Near-Wall Coherent Structures in Turbulent Pipe Flows," *J. Fluid. Mech.* Vol. 900, A. 11, 2020.
6. Moayyedi, M.K., and Sabaghzadegan, F. "Development of Parametric and Time Dependent Reduced Order Model for Diffusion and Convection-Diffusion Problems Based on Proper Orthogonal Decomposition Method," *Amirkabir. J. Mech. Eng.* Vol. 53, No. 7, pp. 8-18, 2021. (In persian)
7. Edwards, W. S., Tuckerman, L. S., Frienser, R. A., and Sorensen, D. C. "Krylov Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comp. Phys.* Vol. 110, No. 1, pp. 82-102, 1994.
8. Lehoucq, R. B., and Scott, J. A. "Implicitly Restarted Arnoldi Methods and Subspace Iteration," *Siam. J. Matrix. Anala.* Vol. 23, pp. 551-562, 1997.
9. Schmid, P. J. "Dynamic Mode Decomposition of Numerical and Experimental Data," *J. Fluid. Mech.* Vol. 656, pp. 5-28, 2010.
10. Rowley, C. W., Mezic, I., Bagheri, S., Schilatter, P., and Henningson, D. S. "Spectral Analysis of Nonlinear Flows," *J. Fluid. Mech.* Vol. 641, pp. 115-127, 2009.
11. Tomas, w.Muld., Efraimsson, G., and Henningson, D. S. "Flow Structures around a High-Speed Train Extracted Using Proper Orthogonal Decomposition and Dynamic Mode Decomposition," *Comput. Fluids.* Vol. 57, pp. 87-97, 2012.
12. Duke, D., Soria, J., and Honnery, D. "An Error Analysis of the Dynamic Mode Decomposition," *Exp. Fluids.* Vol. 52, pp. 529-542, 2012.
13. Seena, A., and Sung, H. J. "Spatiotemporal Representation of the Dynamic Modes in Turbulent Cavity Flows," *Int. J. Heat. Fluid. Flow.* Vol. 44, pp. 1-13, 2013.
14. Liu, H., Yan, C., Zhao, Y., and Qin, Y. "Analysis of Pressure Fluctuation in Transonic Cavity Flows Using Modal Decomposition," *Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 77, pp. 819-835, 2018.
15. Hong, S. L., and Huang, G. P. "Introducing DMD Method to Study Dynamic Structures of Flow Separation With and Without Control," *Acta. Aeronaut. Astronaut. Sin.* Vol. 38, No. 8, 2017.
16. Li, C. Y., Tse, T. K. T., and Hu, G. "Dynamic Mode Decomposition on Pressure Flow Field

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله به توسعه یک الگوی رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی برای مدل‌سازی معادلات نفوذ-جابجایی و اصلاح پایداری آن پرداخته شده است. در این رویکرد، با استخراج ویژگی‌های اصلی سیستم و کاستن از قیود آن، به مدلی با ابعاد کمتر دست یافته شده که همچنان ویژگی‌های معادله اصلی را نیز دارا می‌باشد. نتایج حاصل نشان می‌دهند که رفتار مدل با افزایش عدد رینولدز دچار ناپایداری شده و قابلیت آن در پیش‌بینی دینامیک سیستم کاهش می‌یابد. به‌منظور پایداری مدل رتبه‌کاسته از رویکردی مشابه با مفهوم لزجت گردابه‌ای مشابه با آنچه در مدل‌سازی جریان‌های آشفته و به‌ویژه رویکرد شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ بکار می‌رود، بهره برده است. این کار با اضافه شدن ترم‌هایی جدید به عبارت‌های خطی و ثابت مدل رتبه‌کاسته انجام می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند که مدل اصلاح‌شده هم در بازه زمانی کوتاه و هم در بازه زمانی بلند دقت قابل قبولی با داده‌های حاصل از حل دقیق دارد. از آنجاکه در توسعه این فرم از مدل‌های رتبه‌کاسته از ماتریس داده‌ها برای آموزش مدل استفاده می‌شود در نتیجه سنجش توانایی مدل در پیش‌بینی رفتار سیستم در بازه‌های زمانی خارج از محدوده زمانی که نمایه‌های آموزش تولید شده‌اند، بسیار حائز اهمیت است. با به‌کارگیری عبارات اصلاح در مدل رتبه‌کاسته، دقت آن در پیش‌بینی رفتار سیستم در بازه‌های زمانی بلند نیز همچنان پایدار است. در نهایت بررسی‌ها حاکی از آن است که با وجود افزایش سرعت محاسبات، دقت مدل نیز قابل قبول می‌باشد.

۷- مراجع

1. Liang, Y. C., Lee, H. P., Lim, S. P., Lin, W. Z., Lee, K. H., and Wu, C. G. "Proper Orthogonal Decomposition and Its Applications—Part I: Theory," *J. Sound. Vib.* Vol. 252, No. 3, pp. 527-544, 2002.
2. LeGresley, P., and Alonso, J. "Investigation of Non-linear Projection for POD Based Reduced Order Models for Aerodynamics," *Aerospace. Eng. Reno, NV, USA*, 2001.
3. Fagiano, L., and Gati, R. "On the Order Reduction of the Radiative Heat Transfer Model for the Simulation of Plasma Arcs in Switchgear Devices," *J. Quant. Spectrosc. Ra.* Vol. 169, pp.

- Aerod. Vol. 205, 2020.
- Dynamical Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows,” Fluid Mechanics and Aerodynamics Journal. Vol. 1, No. 1, pp. 29-39, 2021. (In persian)
20. Sabaghzadegan, F. “Development Reduced-Order Models for Convection-Diffusion Problems Based on Proper Orthogonal Decomposition and Dynamic Mode Decomposition,” M.Sc. Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Qom, 2019. (In persian)
- Analysis: Flow Field Reconstruction, Accuracy, and Practical Significance,” J. Wind. Eng. Ind.
17. Sun, C., Tian, T., Zu, X., Hua, O., and Du, Z. “Investigation of the Near Wake of a Horizontal-Axis Wind Turbine Model by Dynamic Mode Decomposition,” Energy. Vol. 227, 2021.
18. Moayyedi, M.K., and Sabaghzadegan, F. “Reduced Order Model of Conduction Heat Transfer in a Solid Plate Based on Dynamic Mode Decomposition,” Sharif. J. Mech. Eng. Vol. 37, No. 3, 2021. (In persian)
19. Moayyedi, M.K., F. Sabetghadam, and M. Taeibi-Rahni. “Calibrated Low-dimensional POD