

علمی - پژوهشی

## شبیه‌سازی عددی چرخش اقیانوسی شبه ژئوستروفیک یک لایه

فاطمه بیگدلو<sup>۲</sup>محمد کاظم مؤیدی<sup>۱\*</sup>

آزمایشگاه پژوهشی اتمسفر زمین و علوم فضایی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۴/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۰۷؛ تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۶/۰۳)

DOR: <https://dorl.net/dor/:20.1001.1.23223278.1402.12.1.4.3>

## چکیده

در این پژوهش یک راهبرد شبیه‌سازی عددی مستقیم با استفاده از طرح عددی آراکوا برای معادله انتقال ورتیسیته باروتروپیک در یک حوزه اقیانوسی کم‌عمق با فرض نیروی اجباری متکی بر باد با دو هسته متقارن و اتلاف در یک مدل یک‌لایه بکار گرفته شده است. شبیه‌سازی عددی مستقیم با حل دقیق این معادله برای دو مسئله با مقادیر عدد رینولدز و عدد راسبی متفاوت مقایسه خواهد شد تا توانایی این الگو در محاسبه دینامیک جریان ارزیابی شود. با بررسی نتایج حاصل از این مقایسه می‌توان پی برد که این رویکرد دارای دقت بالایی بوده و توانایی پیش‌بینی مقادیر میدان جریان را دارد. همچنین نتایج حاصل نشان می‌دهد که شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله انتقال ورتیسیته باروتروپیک موفق شده تا ایجاد یک الگوی چرخشی آشفته را در کوتاه‌مدت پیش‌بینی کند. در این پیش‌بینی مشخص شد که افزایش دو عدد رینولدز و عدد راسبی منجر به اضمحلال برخی گردابه‌ها به دلیل کاهش استهلاک لازم برای بقای آشفته‌گی در گذر زمان خواهد شد.

**کلیدواژه‌ها:** چرخش اقیانوسی، جریان شبه ژئوستروفیک، معادله انتقال ورتیسیته، شبیه‌سازی عددی مستقیم

## Direct Numerical Simulation of Single Layer Quasi-Geostrophic Ocean Circulation

Moayyedi, M.K.<sup>1</sup>Bigdeloo, F.<sup>2</sup>Space Science and Earth Atmosphere Research Lab., Department of Mechanical Engineering  
Institute of Aerospace Studies, University of Qom, Iran

(Received: 2023/04/19, Revised: 2023/07/12, Accepted: 2023/07/29, Published: 2024/08/25)

## ABSTRACT

In this study, a direct numerical simulation strategy using Arakawa numerical scheme for the barotropic vorticity equation as a single-layer quasi-geostrophic ocean model assuming double-gyre wind force and dissipation has been used. DNS will be compared with the exact solution for two problems with different values of Reynolds and Rossby numbers in order to evaluate the ability of this model to calculate dynamics. The results show that DNS of BVE assuming double-gyre wind force has succeeded in predicting the creation of a turbulent circulation pattern in a short time. In this prediction, it was found that the increase in Reynolds and Rossby numbers will lead to the disappearance of some vortices due to the reduction of the required depreciation for the survival of turbulence over time.

**Keywords:** Ocean Circulation, Quasi-Geostrophic Flow, Barotropic Vorticity Equation, Direct Numerical Simulation

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): moayyedi@qom.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد: bigdeloofatemeh2@gmail.com

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

## ۱- مقدمه

فشار تقریباً در تعادل هستند، اما اینرسی نیز مؤثر است. به عبارتی دیگر می‌توان گفت، جریان ژئو ستر و فیک گونه و شکل خاصی از جریان‌های اتمسفری است که در نواحی متصل به اقیانوس و دریاها مثل نزدیک سواحل بیشتر دیده می‌شود. در کل، مدل‌های عددی اقیانوسی، چگونگی پاسخ اقیانوس با چگالی متغیر را نسبت به اندازه حرکت انتقالی از جو و واداشت گرمایی توصیف می‌کنند. مدل‌های شبه ژئوستروفیک برای مطالعه دینامیک اقیانوسی و جوی در منطقه عرض جغرافیایی میانی به بالای کره زمین که اثر کوریولیس قابل توجه است، بسیار موفق بوده‌اند. معادلات شبه ژئو ستر و فیک به‌عنوان معادلات انتقال ورتیسیتی باروتروپیک نیز شناخته می‌شوند. این معادلات تقریبی از معادلات آب کم‌عمق در حد اعداد راسبی کوچک هستند. از آنجایی که مدل‌های گردش اقیانوسی که در آن‌ها مقیاس‌های مانک<sup>۳</sup> و راین<sup>۴</sup> نزدیک به یکدیگر هستند، مانند مدل‌های شبه ژئو ستر و فیک، به‌جای رسیدن به حالت ثابت با نزدیک شدن زمان به بی‌نهایت، وابسته به زمان باقی می‌مانند، بنابراین حل عددی این مدل‌ها به‌صورت آماری ثابت انجام می‌شود. پیچیدگی مدل‌های شبه ژئو ستر و فیک با افزودن لایه‌های فعال بیشتر برای به‌دست آوردن مدل‌های چندلایه افزایش می‌یابد. به همین دلایل، فعالیت‌های بسیاری در زمینه مطالعه جریان‌های شبه ژئو ستر و فیک انجام گرفته است. به‌عنوان مثال، پلاتا و همکاران مشخصه‌های امواج داخلی در باها با باندارس مکزیک را با استفاده از داده‌های میدانی در تاریخ ۲۴ و ۲۵ آوریل ۲۰۰۱ تعیین کردند [۲]. مطالعه آنها نشان می‌دهد که گردش ژئوستروفیکی در خلیج مکزیک در فصل بهار نقش مهمی در مبادله جرم آب میان ناحیه محصور به ساحل شرقی، کناره خلیج و آب آزاد ایفا می‌کند. رید و همکاران اثرات جریان ژئو ستر و فیک بر ارتفاع ساحل در شمال اقیانوس آرام شمالی را بررسی کردند [۳]. بر اساس مطالعه آنها، تعادل ژئو ستر و فیک در سطح دریا در امتداد مرز شرقی، شمالی و غربی اقیانوس به دلیل اثرات مکانی چرخش‌های زیر قطبی در اقیانوس آرام شمالی، علت افزایش طول زمستان در این نواحی هست. ادوارد و همکاران یک مدل شبه ژئو ستر و

مطالعه حوزه‌های آبی یکی از اهداف مجامع علمی در تمام جهان است. بررسی فرا سنج‌های فیزیکی، جریان‌های دریایی، تأثیر آن بر آب‌وهوا و اقلیم خشکی‌ها از موضوع‌های مورد تحقیق در این حوزه است. مطالعه جریان‌های دریایی در مسائل عمده و مهمی همچون مدیریت منابع دریایی و ساحلی، ماهیگیری و مسیریابی از اهمیت زیادی برخوردار است. جریان ژئو ستر و فیک که از ترازمندی نیروی گرادیان فشار و نیروی کوریولیس ایجاد می‌شود، عامل اصلی در ایجاد جریان‌ها در مقیاس بزرگ است. نیروهای غالبی که در راستای قائم و افقی عمل می‌کنند، به ترتیب گرادیان فشار و وزن آب در راستا قائم و گرادیان فشار و نیروی کوریولیس<sup>۱</sup> در راستای افقی هستند. همچنین فشار در هر نقطه با تقریب خوبی برابر با وزن آب ستون بالای آن نقطه است [۱]. جریان‌های ژئو ستر و فیک، بخش بزرگی از جریان‌های اقیانوسی را تشکیل می‌دهند که نقش عمده‌ای در تغییرات آب‌وهوایی ایفا می‌کنند. این جریان‌ها، یک مدل ساده شده از جریان‌های ژئوفیزیکی هستند که در آن چرخش به‌وسیله اثرات وزش باد حائز اهمیت است. چرخش‌های اقیانوسی، چرخش‌های بزرگ دایره‌ای هستند که به‌واسطه اثر کوریولیس و نیروی باد ایجاد می‌شوند. الگوی وزش باد بر روی سطح زمین باعث حرکت روبه‌جلوی آب اقیانوس می‌شود. با این حال، این الگو در اثر چرخش زمین (اثر کوریولیس) منحرف شده و سبب می‌شود تا باد و آب اقیانوس در یک الگو دایره‌ای شروع به چرخش کنند. اگرچه باد و اثر کوریولیس سبب ایجاد چرخش‌ها در اقیانوس هستند، اما وجود قاره‌ها، اندازه و شکل آن‌ها را مشخص می‌کند. عموماً مطالعات جریان‌های جوی و اقیانوس‌شناسی بر روی جریان‌هایی که مقیاس‌های طول افقی آن‌ها در مقایسه با مقیاس‌های طولی عمودی بسیار بزرگ‌تر هستند، انجام می‌شود. درحالی‌که حرکت ژئو ستر و فیک به جریانی اطلاق می‌شود که از تعادل دقیق بین نیروی کوریولیس و نیروهای گرادیان فشار افقی حاصل می‌شود، حرکتش به ژئو ستر و فیک<sup>۲</sup> به جریان‌هایی اطلاق می‌شود که در آن نیروی کوریولیس و نیروهای گرادیان

3-Munk

4-Rhiens

1-Coriolis

2-Quasi-Geostrophic

قابل قبول و برابری را نمایش دادند [۶]. انتخاب اینکه کدام نوع شبکه‌بندی برای گسسته‌سازی مناسب‌تر است، بسیار وابسته به نسبت اندازه شبکه محاسباتی به شعاع راسبی است. با توجه به اینکه توان محاسبات موجود در سال‌های اخیر به طور قابل توجهی افزایش یافته است، مدل‌سازی کل اقیانوس‌های جهان با شبکه‌بندی‌های ریزتر امکان‌پذیر شده است. مدل‌سازی عددی از زمان اولین راه‌حل عددی موفق معادله ورتیسیتی باروتروپیک در منطقه محدودی از سطح زمین در سال ۱۹۵۰ توسعه یافته است [۷]. پیرو این شبیه‌سازی‌های عددی، باربی و همکاران یک رویکرد عددی برای اپراتور لاپلاسی موجود در جریان‌های شبه‌ژئو ستر و فیک را ارائه کردند [۸]. الگوریتم توسعه داده شده توسط آنها کاملاً با نتایج حل دقیق مطابقت داشته و یک رویکرد جدید برای شبیه‌سازی معادلات شبه‌ژئو ستر و فیک محسوب می‌شود. رحمان و همکاران نیز یک رویکرد مدل‌سازی با کاهش مرتبه را برای پیش‌بینی زمان واقعی جریان‌های مقیاس متوسط ارائه دادند که در آن اثربخشی، دقت و قابلیت پارامتر وزنی فرض شده بین مدل گالرکین و یادگیری ماشین بسیار بالا و قابل قبول به دست آمد [۹]. ویلیامسون در پژوهشی با ادغام عددی معادله ورتیسیتی باروتروپیک بر روی یک شبکه ژئودزیکی<sup>۳</sup> کروی یک مدل دوره‌ای با ۱۲ روز را با استفاده از شرایط اولیه تحلیلی موجی، مورد بررسی قرار داد که با استفاده از این الگو، راه‌حل تحلیلی و عددی کاملاً یک‌شکل به دست آمده و تنها تفاوت آنها ناشی از یک خطای فازی کوچک است [۱۰]. لی و همکاران، راه‌حل‌های تعادلی مناسب‌تر معادله ورتیسیتی باروتروپیک را بازبینی کردند [۱۱]. در تمامی روش‌های تعادل رسیدن تابع جریان مشخص می‌شود که حالت‌های تعادلی معادله حاکم یک ساختار موجی با فازهای متفاوت هستند. عبدالمالک نیز با استفاده از روشی پیشنهادی، به حل معادله ورتیسیتی باروتروپیک لزج در مدل‌های اقیانوسی پرداخت [۱۲]. روش پیشنهادی او با استفاده از الگوی گروه لی<sup>۴</sup> می‌باشد که معادله انتقال ورتیسیتی لزج باروتروپیک غیر واگرا را در صفحه بتا و نیروی کوری ولی ارضا می‌کند؛ بنابراین با توجه به طیف گسترده‌ای از مطالعات

فیک را به‌عنوان یک نمونه اولیه ممکن برای کمک به درک بهتر آب‌های موجود در اتمسفر در یک محیط ایده‌آل مورد بررسی قرار دادند [۴]. مطالعه آنها نشان داد، توان طیفی آب‌های اتمسفر بسته به پارامتر سرعت بارندگی متغیر است که نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه بارش بر آنها می‌باشد. با وجود علاقه فزاینده محققان برای توسعه پارامترهای مقیاس زیرشبکه در جریان‌های ژئوفیزیکی آشفته ناشی از اتمسفر سیاره‌ها و اقیانوس‌ها، مطالعات چرخه‌های باد محور ایده‌آل شده، برای درک جنبه‌های مختلف دینامیک اقیانوس، از جمله نقش گردابه‌های مقیاس متوسط و تأثیر آنها بر چرخه‌های اقیانوسی، افزایش یافته است. با وجود سادگی مدل شبه‌ژئو ستر و فیک، به دلیل ایده‌آل‌سازی فیزیکی، این مدل می‌تواند بینش‌های قابل توجهی را در ارتباط با رفتار جریان‌های ژئوفیزیکی<sup>۱</sup> در مقیاس بزرگ ارائه داده و این نقطه شروع کشف سیستم‌های شبه‌ژئو ستر و فیک پیچیده‌تر است. حل عددی معادلات حاکم بر جریان‌های ژئو ستر و فیک، نیازمند تبدیلات معادلات به شکل گسسته، بر اساس روش‌های مختلف است. از جمله این روش‌ها، الگویی است که آراکاوا<sup>۲</sup> مطرح کرد [۵]. محدودیت‌های انتگرالی بر روی میدان‌های مهم فیزیکی با مقادیر درجه دوم؛ مانند بقای انرژی جنبشی و ورتیسیتی در روش‌های تفاضل محدود معادلات حرکت برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر دوبعدی برطرف نمی‌شوند، مگر اینکه عبارت ژاکوبین غیرخطی در روش تفاضل محدود به شکلی اصلاح شود که به‌درستی تعامل بین نقاط شبکه را نشان دهد. آراکاوا در این مقاله با ارائه یک روش برای محاسبه این ترم، مشکل عمده‌ای که مانع از پیشرفت در ادغام عددی معادلات حرکت سیال در بلندمدت وجود دارد و باعث ایجاد ناپایداری محاسباتی غیرخطی روش‌های تفاضل محدود معادلات دیفرانسیل حاکم می‌شود، را برطرف کرده است. این روش برای حفظ پایداری محاسبات به دلیل وجود ترم غیرخطی در معادلات توسط لیلی مورد بررسی قرار گرفت و چندین روش جایگزین برای پایداری محاسبات به‌صورت تحلیلی یا تجربی آزمایش شد که تمامی آنها دقت

1- Geophysics

2 -Arakawa

3-Geodesic

4-Lie Group

کند. در رابطه نهایی در حالت بی‌بعدی تنها با استفاده از تغییر دو عدد رینولدز و عدد راسبی، نتایج مختلف حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم به دست می‌آیند که با یکدیگر مقایسه و مورد بررسی قرار می‌گیرند. به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت با افزایش عدد رینولدز و عدد راسبی و به دنبال آن کاهش اثرات ناشی از نیروی کوریولیس و ترم اتلاف، احتمال اضمحلال برخی از گردابه‌ها افزایش می‌یابد که موجب از بین رفتن تعدادی از چرخش‌ها در گذر زمان خواهد شد.

## ۲- معادلات حاکم

با استفاده از معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک تراکم‌ناپذیر دوبعدی می‌توان جریان اقیانوسی شبه‌ژئو ستر و فیک یک‌لایه را به‌منظور پیش‌بینی میدان جریان سیال مدل کرد. این معادله یکی از پرکاربردترین مدل‌های ریاضی برای بررسی مسائل گردش اقیانوسی است. رابطه (۱) معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک را بیان می‌کند [۱۶]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = D + F \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = D + F \quad (1)$$

دو ترم  $D$  و  $F$  به ترتیب بیانگر اتلاف و نیرو هستند. ترم جابجایی  $J(\omega, \psi)$  که ژاکوبین<sup>۳</sup> غیرخطی نامیده می‌شود به شکل رابطه (۲) بیان می‌شود.

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2)$$

مقادیر  $\omega$  و  $\psi$  در رابطه (۱) به ترتیب نشان‌دهنده ورتیسیتی و تابع جریان می‌باشند. در یک میدان دوبعدی ورتیسیتی یک کمیت اسکالر بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

رابطه زیر بین تابع جریان و ورتیسیتی در یک میدان جریان دوبعدی برقرار است:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (4)$$

همچنین مولفه‌های بردار سرعت برای یک جریان دوبعدی را می‌توان از تابع جریان به شکل زیر به دست آورد:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5)$$

در حوزه شبیه‌سازی عددی معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک به‌منظور مدل‌سازی جریان شبه‌ژئوستروفیک، مو و همکاران، مدل‌های رتبه کاسته برای معادلات شبه‌ژئوستروفیک را مورد بازبینی قرار دادند [۱۳]. نتایج آن‌ها نشان از دقت بالاتر و هزینه محاسباتی کمتر روش شبیه‌سازی رتبه کاسته مبتنی بر گردابه بزرگ‌نسبت به طرح گالرکین در تعداد موده‌های محدود داشت. جمال نیز ویژگی‌های تغییرپذیری تقارن ضریب‌های پذیرفته شده توسط معادله ورتیسیتی باروتروپیک را مورد مطالعه قرارداد که در نهایت توانست روابطی بین این ضریب‌ها و تقارن نقطه لی پیدا کند [۱۴]. همچنین ماولیک و همکاران نیز با استفاده از دو روش اسمگورینسکی<sup>۱</sup> و لیت<sup>۲</sup> به بررسی چرخش اقیانوسی شبه‌ژئو ستر و فیک یک‌لایه و دولایه با نیروی باد اجباری پرداختند. نتایج آن‌ها نشان از اتلاف و لزجت گردابه‌ای کمتر در دینامیک میدان جریان با استفاده از مدل لیت داشت [۱۵].

در این پژوهش به مطالعه جریان شبه‌ژئو ستر و فیک تک‌لایه و بررسی چگونگی تغییرات ساختار میدان جریان باتکیه بر تغییرات کمیت‌هایی همچون ورتیسیتی و تابع جریان و تحت تأثیر تغییرات عدد راسبی و عدد رینولدز پرداخته شده است. بدین منظور معادلات حاکم بر جریان شبه‌ژئوستروفیک تک‌لایه که همان معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک دوبعدی می‌باشد، به‌صورت عددی حل شده است. حل این معادله با استفاده از طرح عددی آراکاو، روش تفاضل صریح و رانگ - کوتا انجام گرفته است. برای اعتبارسنجی مدل عددی، داده‌های حاصل از آن با نتایج حل دقیق به‌ازای تابع نیروی اجباری خاص و برای دو کمیت ورتیسیتی و تابع جریان، مقایسه شده است. شبیه‌سازی عددی مستقیم حاصل در دو حالت متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. در مسئله اول عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۱۶ و در مسئله دوم عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۳۶ در نظر گرفته شده است. این معادله در دو مسئله مورد بررسی با فرض تقریب صفحه بتا، نیروی متکی بر باد با دو هسته چرخشی متقارن و همچنین مکانیزم اتلاف اجباری در فرم لاپلاسی، حل می‌شود تا در طی یک‌زمان طولانی یک گردش با چند هسته چرخشی را ایجاد

1-Smagorinsky

2-Leith

3-Jacobian

مانک ( $\delta_m$ )، برای لایه مرزی لزج که مشخص کننده قدرت اتلاف می‌باشد و (ب) مقیاس راین ( $\delta_l$ )، برای لایه مرزی اینرسی که به منظور اندازه‌گیری قدرت غیرخطی است. این مقیاس‌های طولی طبق رابطه (۱۰) تعریف می‌شوند.

$$\frac{\delta_M}{L} = \left(\frac{\nu}{\beta L^2}\right)^{1/3} = (Re^{-1} Ro)^{1/3} \quad (10)$$

$$\frac{\delta_I}{L} = \left(\frac{\nu}{\beta L^2}\right)^{1/2} = Ro^{1/2}$$

باید توجه داشت که مشخصات این مقیاس‌های طولی نیز مقادیر عدد رینولدز و عدد راسبی را در معادله (۹) تعیین می‌کنند.

### ۳- روش حل عددی

به منظور حل عددی معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک دوبعدی حاکم بر جریان شبه‌ژئوسترو ستر و فیک تک‌لایه از الگوی شبیه‌سازی عددی مستقیم استفاده شده است. بدین منظور ترم‌های مکانی و زمانی معادله به صورت مجزا مدل شده و برای ترم مشتقات مکانی نیز از دو الگوریتم مختلف برای ترم‌های غیرخطی و عبارت نفوذ استفاده شده است. برای جداسازی ترم جابه‌جایی از روش آراکاو طبق رابطه (۱۱) استفاده شده است:

$$J(\omega, \psi) = \frac{1}{3}(J_1(\omega, \psi) + J_2(\omega, \psi) + J_3(\omega, \psi)) \quad (11)$$

به طوری که:

$$J_1(\omega, \psi) = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - (\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1})(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})]$$

$$J_2(\omega, \psi) = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [\omega_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - \omega_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) - \omega_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) + \omega_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1})]$$

$$J_3(\omega, \psi) = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [\omega_{i+1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j}) - \omega_{i-1,j-1}(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j-1}) - \omega_{i-1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}) + \omega_{i+1,j-1}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1})]$$

(۱۲)

معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک ارائه شده در رابطه (۱) از تقریب صفحه بتا استفاده می‌کند. برای محاسبه اثرات چرخش زمین در تقریب صفحه بتا، پارامتر کوریولیس با تقریب  $f = f_0 + \beta y$  محاسبه می‌شود که در آن  $f_0$  ثابت کوریولیس متوسط و مقدار  $\beta$  گرادیان پارامتر کوریولیس در مرکز حوزه اقیانوسی ( $y=0$ ) می‌باشد. مکانیزم اتلاف لزجت موجود در معادله (۱) در فرم استاندارد به صورت زیر می‌باشد:

$$D = \nu \nabla^2 \omega \quad (6)$$

در این رابطه  $\nu$  ضریب لزجت گردابه‌ای است. همچنین ترم تابع اجباری باد با دو هسته چرخشی موجود در رابطه (۱) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$F = \frac{\tau_0}{\rho H} \frac{\pi}{L} \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right) \quad (7)$$

$\tau_0$  حداکثر دامنه تنش،  $\rho$  چگالی و  $H$  میانگین عمق حوزه مورد مطالعه می‌باشد. به منظور بی‌بعد سازی معادله (۱) از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \tilde{y} = \frac{y}{L} \quad \tilde{t} = \frac{t}{L/V} \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{V/L}$$

در این روابط،  $L$ ، طول مشخصه (طول محدوده در راستای افقی) و  $V$  سرعت مشخصه می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \frac{\tau_0}{\rho H} \frac{\Pi}{\beta L} \quad (8)$$

در نهایت معادله حاکم بر جریان باروتروپیک تراکم‌ناپذیر شبه‌ژئوسترو ستر و فیک دوبعدی در حالت بدون بعد  $W, V$  به صورت زیر خواهد بود که برای سهولت در نوشتار از علامت  $\sim$  صرف نظر شده است:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \frac{1}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{1}{Ro} \sin(\pi y) \quad (9)$$

در این رابطه،  $Ro$  عدد راسبی و  $Re$  عدد رینولدز می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad Ro = \frac{v}{\beta L^2}$$

در اینجا تاکید می‌شود که عدد رینولدز و عدد راسبی با توجه به روش بی‌بعد سازی می‌توانند متفاوت باشند. دو مقیاس طولی که برای درک فیزیک مسئله در اقیانوس‌شناسی مفید هستند، عبارتند از: (الف) مقیاس

جدول (۱): کمیت‌های تنظیم شده در ناحیه مورد مطالعه

مقدار	کمیت
۱۰۰۰ (km)	$L$
۱ (km)	$H$
۵۴۰۸۸/۲۶ (m/s)	$V$
۲/۱۴۱ (روز)	$L/V$
۱۰۳۰ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$
$۱/۵ \times 10^{-۱۰}$ (1/ms)	$\beta$
۰/۲۶۶ (N/m <sup>2</sup> )	$\tau_0$

برای حل عددی مستقیم معادلات حاکم بر جریان شبه ژئو ستروفیک تک‌لایه، نیاز به شرایط مرزی و اولیه می‌باشد. بدین منظور از شرط مرزی لغزش برای سرعت که به شرط مرزی دیریشله همگن برای ورتیسیتی تبدیل می‌شود، برای هر چهار مرز حجم کنترل مورد نظر استفاده شده است.

$$\omega|_{\Gamma} = 0$$

$\Gamma$  نماد تمام مرزهای دکارتی است. همچنین شرط مرزی نفوذناپذیری برای تابع جریان فرض شده است:

$$\psi|_{\Gamma} = 0$$

لازم به ذکر است برای شرط اولیه، محاسبات از حالت سکون (مقدار صفر برای ورتیسیتی و تابع جریان) آغاز شده است و تا زمانی که معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک از نظر آماری به یک حالت پایدار برسد که در آن نیروی باد، اتلاف و ترم ژاکوبین غیرخطی یکدیگر را متعادل کنند ادامه پیدا می‌کند.

#### ۵- اعتبارسنجی حل عددی

روش‌های شبیه‌سازی عددی به لطف کاهش هزینه‌ها و افزایش سرعت پردازشگرها پیشرفت زیادی داشته است. لیکن حل یک مسئله با استفاده از روش‌های عددی تنها یافتن نتیجه نیست، بلکه اطمینان از کیفیت نیز باید مدنظر باشد. برای این اطمینان لازم است یک معیار اعتبارسنجی ایجاد شود که امکان کمی‌سازی عینی تفاوت بین نتایج حاصل و داده‌های واقعی را فراهم کند؛ بنابراین در این بخش، اعتبارسنجی نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک به منظور شبیه‌سازی جریان شبه‌ژئو ستر و فیک تک‌لایه مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور صحت‌سنجی کد شبیه‌سازی عددی، از مقایسه

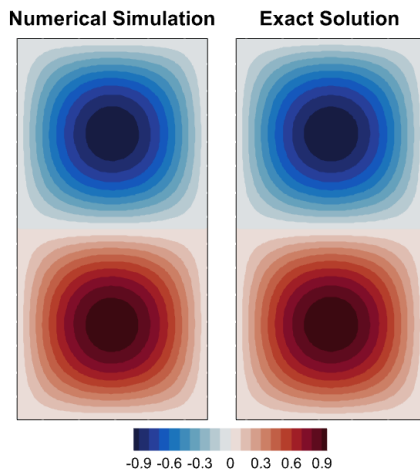
برای محاسبه فرم گسسته ترم اتلاف موجود در معادله حاکم نیز، روش اختلاف محدود تفاضل مرکزی مرتبه دوم بکار گرفته شده است:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (۱۳)$$

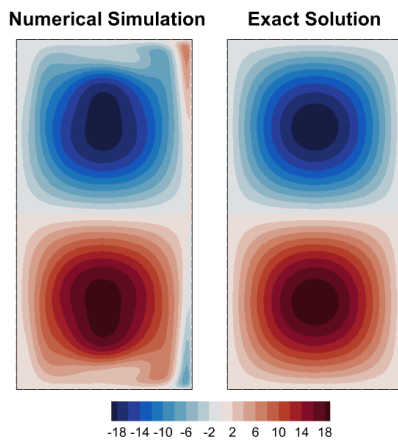
همچنین، انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ - کوتا مرتبه چهارم انجام شده است.

#### ۴- هندسه مسئله و شرایط مرزی

در این مطالعه از دو مجموعه پارامتر مختلف برای دو فیزیک متفاوت استفاده شده است. در مسئله اول مقادیر عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ در نظر گرفته شده است و نیز در مسئله دوم دو عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ فرض شده است. شایان ذکر است، از آنجاکه مسئله مورد بررسی یک مسئله ژئوفیزیکی می‌باشد که به طور طبیعی امکان وقوع دارد، بنابراین با عوامل طبیعی همچون سرعت چرخش کره زمین در ارتباط بوده که تغییر در آن غیرممکن است. پس واضح است که تغییر در برخی شرایط مانند عدد رینولدز و افزایش آن تا مقادیر بسیار بالا در تناقض با شرایط ژئوفیزیکی و مقیاس‌های مانک و راین فرض شده در این مطالعات می‌باشد. شبیه‌سازی عددی مستقیم از حالت سکون تا حداکثر زمان بدون بعد برابر با ۹۰ با استفاده از یک گام زمانی ثابت و متوالی برابر با ۰/۰۰۰۱ روی شبکه‌ای به فرم یکنواخت در مختصات کارتزین و با تعداد گره‌هایی برابر با  $۱۵۰ \times ۳۰۰$  انجام شده است. این وضوح شبکه مبتنی بر مطالعات دیگر محققان به دست آمده که عموماً برای بررسی چرخش‌های اقیانوسی استفاده می‌شود [۱۵ و ۱۶] بنابراین، گام زمانی و شبکه‌بندی فرض شده به اندازه کافی کوچک می‌باشد تا مسئله مورد بررسی را در حالت گذر از ناحیه گذر و آشفته تا رسیدن به یک حالت پایدار آماری پیش‌بینی کند. اگرچه از اعداد بدون بعد در تجزیه و تحلیل معادله حاکم استفاده شده است، اما می‌توان به راحتی مقادیر ابعادی متناظر را با استفاده از ابعاد ناحیه مورد بررسی اقیانوس محاسبه کرد. به همین منظور مقادیر عددی مرتبط طبق جدول ۱ تنظیم می‌شوند؛ بنابراین آخرین گام زمانی بدون بعد محاسبه شده، در حالت ابعادی تقریباً معادل ۱۹۳ روز زمینی خواهد شد.



(الف)



(ب)

شکل (۱): خطوط هم‌تراز (الف) تابع جریان و (ب) ورتیسیتی حاصل از حل دقیق و شبیه‌سازی عددی مستقیم در عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶

جدول (۲): میزان خطا بین داده‌های حل عددی و حل دقیق

مقدار	کمیت
$4/09 \times 10^{-5}$	تابع جریان
$29 \times 10^{-3}$	ورتیسیتی

#### ۶- نتایج

در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک دوبعدی برای میدان مطابق شرایط مندرج در جدول ۱ ارائه خواهد شد. در بخش قبل نتایج این شبیه‌سازی اعتبارسنجی شده و توانایی پیش‌بینی دینامیک جریان در آن مورد ارزیابی قرار گرفته بود. همان‌طور که مطرح شد، معادله حاکم برای شبیه‌سازی جریان شبه‌ژئوسترو ستر و فیک یک‌لایه با فرض نیروی متکی بر

داده‌ها با حل دقیق معادله به‌ازای یک تابع باد اجباری خاصی استفاده شده است. در این روش روابط مشخصی برای کمیت‌های ورتیسیتی و تابع جریان، به‌طور دقیق به‌دست‌آمده که به‌صورت نتایج غیروابسته به زمان می‌باشد. برای محاسبه عددی دقیق معادله حاکم بر مسئله شبه‌ژئوسترو ستر و فیک، به‌ازای نیروی اجباری موجود در سمت راست معادله (۱) از رابطه (۱۴) استفاده شده است، این رابطه در پژوهشی دیگر نیز توسط سان مورد ارزیابی قرار گرفته است [۱۷]:

$$F = -\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) - \frac{Ro}{Re} 4\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (14)$$

بنابراین، مقادیر حاصل از حل دقیق برای پارامتر ورتیسیتی و تابع جریان به ترتیب از رابطه (۱۵) به دست خواهد آمد:

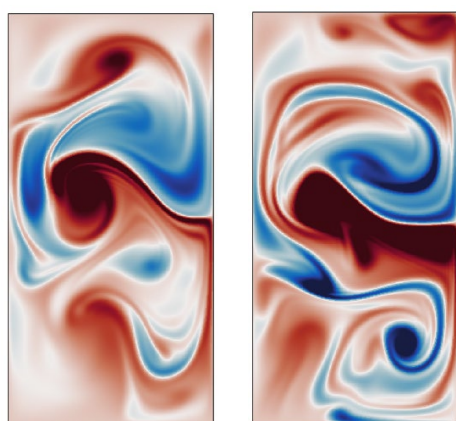
$$\omega(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (15)$$

$$\psi(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

به‌منظور بررسی دقت شبیه‌سازی، در شکل ۱، مقایسه‌ای بین خطوط هم‌تراز تابع جریان حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و حل دقیق معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک دوبعدی در عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ نمایش داده‌شده است.

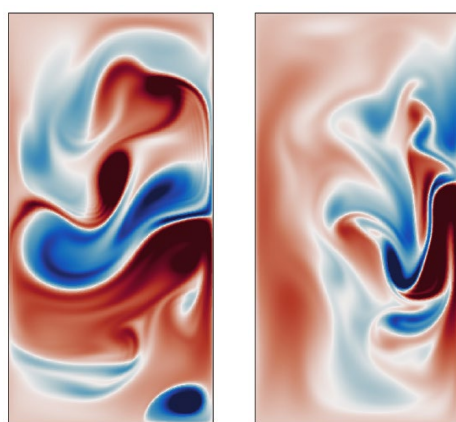
به‌وضوح مشخص است که نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم برای محاسبه مقدار تابع جریان دارای دقت کافی می‌باشد. به همین ترتیب، مقایسه‌ای بین خطوط هم‌تراز حاصل از حل دقیق و شبیه‌سازی عددی مستقیم برای کمیت ورتیسیتی در عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ نیز صورت‌گرفته است که در اکثر نقاط کاملاً منطبق بوده و دارای دقت مناسبی می‌باشد. شایان‌ذکر است که نتایج حاصل، نشان‌دهنده دو هسته چرخشی در میدان جریان در هر دو شبیه‌سازی می‌باشد. همچنین مقدار خطای موجود بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و حل دقیق از طریق روش جذر میانگین مربعات به‌دست‌آمده که در جدول ۲ برای هر دو کمیت مورد بررسی نمایش داده‌شده است.

شکل ۴، خطوط هم‌تراز ورتیسیتی در عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ را برای چهار گام زمانی مختلف را نمایش می‌دهد. بر اساس نتایج حاصل از آخرین گام زمانی، بیشینه مقدار ورتیسیتی در حالت بدون بعد معادل با ۲۸۵/۱۵۵ در این حوزه ثبت شده که نسبت به مسئله اول تقریباً به نصف رسیده است. از آنجا که عدد رینولدز بیانگر نسبت نیروی اینرسی به نیروی ناشی از لزجت و عدد راسبی مشخص کننده نسبت نیروی اینرسی به نیروی کوریولیس است، بنابراین با افزایش این دو مقدار نیروی اینرسی در جریان غالب می‌شود اما ترم اتلافات موجود در معادله حاکم کاهش می‌یابد و با کاهش ترم اتلافات و به واسطه افزایش عدد راسبی و در پی آن کاهش نیروی کوریولیس، چرخش‌ها کم شده و برخی از گردابه‌ها مضمحل خواهند شد، این مفهوم به طور واضح در این شکل نمایان است.



(ب)

(الف)



(د)

(ج)

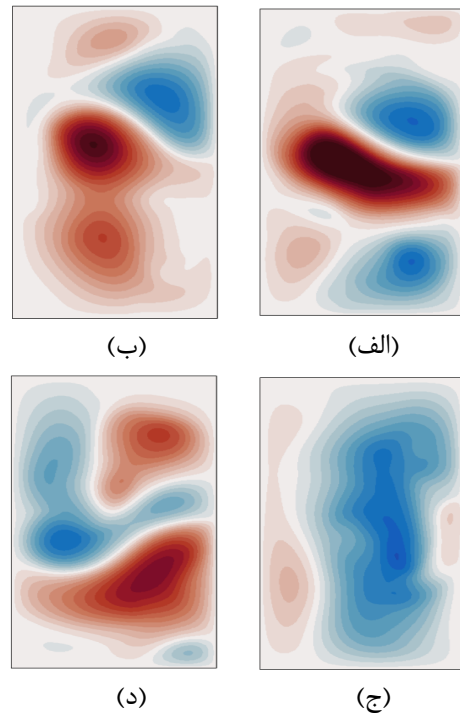
شکل (۲): خطوط هم‌تراز ورتیسیتی به ازای عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ برای (الف)  $t=10$ ، (ب)  $t=20$ ، (ج)  $t=80$  و (د)  $t=90$

باد با دو هسته چرخشی متقارن و اتلاف‌ها برای دو مورد مطالعاتی متفاوت محاسبه شده است. در مسئله موردنظر دو کمیت عدد رینولدز و عدد راسبی به ترتیب برابر با ۲۰۰ و ۰/۰۰۱۶ و در مسئله دوم به ترتیب برابر با ۴۵۰ و ۰/۰۰۳۶ در نظر گرفته شده است. معادله حاکم با استفاده از الگوی عددی مبتنی بر روش‌های آراکاو و تفاضل محدود مرکزی، گسسته‌سازی مکانی شده و انتگرال گیری زمانی از روش رانگ - کوتا با گام‌های زمانی مساوی و برابر با ۰/۰۰۰۱ روی شبکه‌ای با سازمان صورت گرفته است. شایان ذکر است، تمام آزمایش‌های عددی موجود در این پژوهش تا حداکثر زمان بدون بعد برابر با ۹۰ انجام گرفته است. در صورتی که در میدان جریان، مقیاس‌های مکانی بزرگی وجود داشته باشد طبیعتاً به دلیل چرخش بالا یا به عبارتی ورتیسیتی زیاد، انرژی جنبشی بیشتری در میدان جریان وجود داشته؛ بنابراین جریان با توسعه آشفتگی همراه خواهد بود. این در حالی است که اگر مقیاس‌های مکانی کوچک در جریان غالب شوند، سرعت تولید آشفتگی به دلیل پایین بودن سطح انرژی جنبشی مقیاس‌های مکانی کاهش می‌یابد. شکل ۲ خطوط هم‌تراز ورتیسیتی در چهار گام زمانی مختلف را به‌ازای عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ نشان می‌دهد. بیشینه مقدار ورتیسیتی جریان در حالت بدون بعد در آخرین گام زمانی معادل با ۶۱۸/۱۷۷ در این حوزه می‌باشد. به‌وضوح غالب‌بودن گردابه‌های با چرخش بالا قابل مشاهده است. جهت حرکت نواحی قرمز رنگ به شکل پادساعت گرد و نواحی آبی‌رنگ ساعت گرد می‌باشد. با مشاهده مرحله به مرحله می‌توان دریافت که در هر گام زمانی تغییرات زیادی در یک نقطه مشخص بدون هیچ قاعده‌ای رخ داده است که با مفهوم آشفتگی تطابق دارد. همچنین در شکل ۳ خطوط هم‌تراز تابع جریان در چهار گام زمانی به‌ازای عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ نشان داده شده است. خطوط هم‌تراز تابع جریان، در ابتدا سه هسته چرخشی غالب را نشان می‌دهد که در گذر زمان بدون هیچ قاعده و الگوی مشخصی به چهار و یا پنج هسته تبدیل شده است.

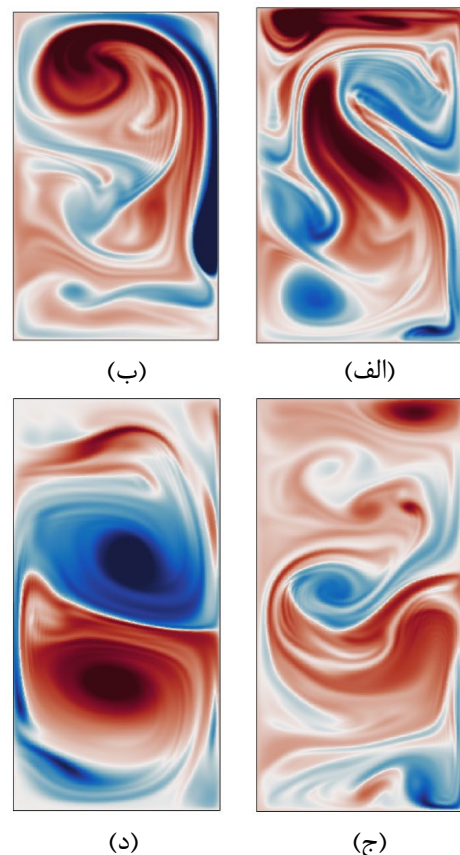


خطوط هم‌تراز تابع جریان در عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ برای چهار گام زمانی متفاوت نیز در شکل ۵ نمایش داده شده است. بر اساس نتایج حاصل از این شکل، می‌توان دریافت که جریان در ابتدا دارای سه هسته چرخشی متوسط است که با گذر زمان به دو هسته چرخشی غالب و دو هسته کوچک‌تر تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت این چرخش‌ها از یک الگوی متناوب خاص پیروی نمی‌کنند. لازم است تاکید شود که برای هر دو مسئله مورد بررسی، دو یا سه هسته چرخشی غالب در نمودارهای خطوط هم‌تراز تابع جریان دیده می‌شود که این در تضاد با مفهوم ایجاد یک جریان با چهار هسته چرخشی توسط نیروی باد با دو هسته در حال گردش می‌باشد، زیرا که ایجاد یک جریان با چهار هسته گردشی نیازمند یک میانگین زمانی طولانی‌مدت است و در این پژوهش بازه زمانی کوتاه‌تری فرض شده است.

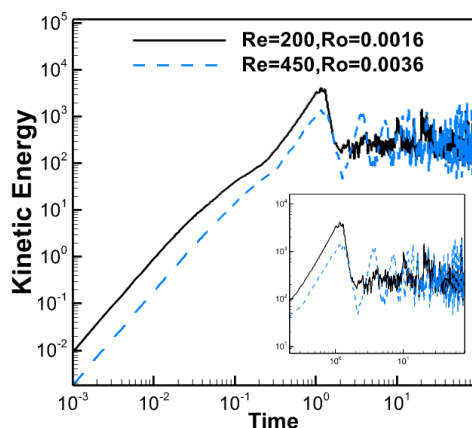
در بسیاری از مدل‌های چرخش اقیانوسی مانند مدل‌های شبه‌ژئوستروفیک و فیک باگذشت زمان راه‌حل‌ها به حالت پایدار همگرا نمی‌شوند، بلکه با تولید یک حالت آماری پایدار وابسته به زمان باقی می‌مانند. طرح‌های عددی ارائه شده برای اصلاح عددی چنین پدیده‌هایی باید برای چنین رفتاری از راه‌حل‌ها در طولانی‌مدت مناسب باشند؛ بنابراین در ادامه، سیر تکامل انرژی جنبشی بر حسب زمان در حوزه مورد بررسی برای دو مسئله گفته شده، در شکل ۶ نمایش داده شده است. این سری‌های زمانی برای دو مجموعه پارامتر مورد آزمایش رسم شده است. برای هر دو مجموعه پارامتر، تکامل زمانی از یک الگو پیروی می‌کند. در این الگو بعد از عبور از ناحیه گذرا در یک بازه در حدود  $t = 1$  نمودار به یک حالت پایدار آماری همگرا شده و به صورت تقریباً متناوب تکرار می‌شود. بر اساس این نمودار می‌توان به راحتی زمانی که میدان جریان وارد ناحیه گذر و بلافاصله آشفته شده است را بیان کرد. زیرا در طی تبدیل جریان آرام به جریان آشفته ساختارهای بزرگ‌مقیاس غالب شده و در پی آن انرژی جنبشی افزایش خواهد یافت. همچنین از آنجاکه در جریان آشفته هر دو ساختار گردابه‌ای بزرگ‌مقیاس با سطح انرژی بالاتر و کوچک‌مقیاس با سطح انرژی کمتر وجود داشته و به طور مکرر به یکدیگر تبدیل می‌شوند، هر دو مجموعه پارامتر پس از عبور از ناحیه گذرا به یک حالت پایدار آماری همگرا شده و به صورت تقریباً



شکل (۳): خطوط هم‌تراز تابع جریان به ازای عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ برای (الف)  $t=10$ ، (ب)  $t=20$ ، (ج)  $t=80$  و (د)  $t=90$



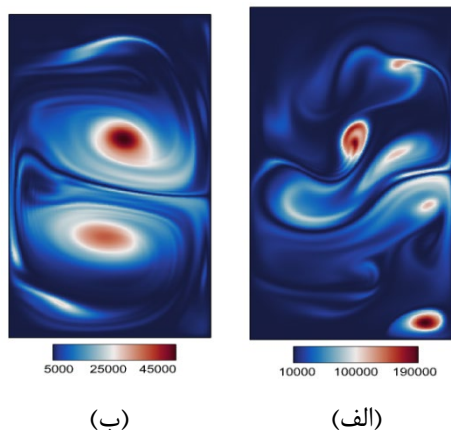
شکل (۴): خطوط هم‌تراز ورتیسیته به ازای عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ برای (الف)  $t=10$ ، (ب)  $t=20$ ، (ج)  $t=80$  و (د)  $t=90$



شکل (۶): تغییرات انرژی جنبشی کل جریان در گذر زمان در شکل ۸ نیز خطوط هم‌تراز پالینستروفی محلی برای دو مسئله مورد نظر و در آخرین گام زمانی نمایش داده شده است. مقدار این کمیت بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \frac{1}{2} \|\nabla(\nabla \times u)\|^2 = \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|^2 \quad (17)$$

این کمیت نشان‌دهنده چگونگی انتقال ورتیستی از یک راستا به راستای دیگر در میدان جریان را نشان می‌دهد.



شکل (۷): خطوط هم‌تراز انستروفی در آخرین گام زمانی برای (الف) عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ و (ب) عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶

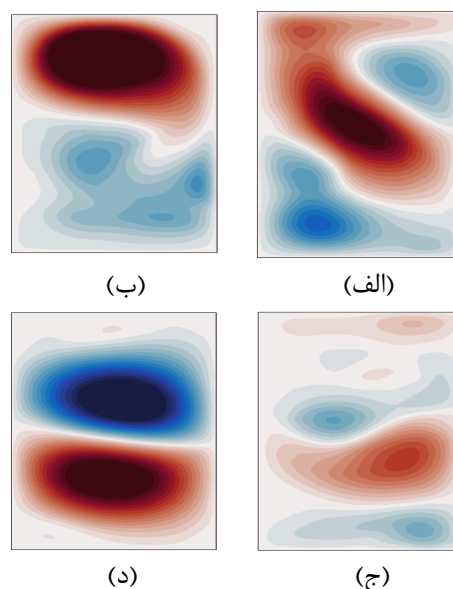
در شکل ۹ (الف) نیز تغییرات انستروفی کل به ازای دو مسئله بررسی شده با عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ و همچنین عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ بر حسب زمان نمایش داده شده است. طبق این نتایج می‌توان گفت در اتلافات کمتر و به دنبال آن غالب شدن رفتارهای همرفتی در میدان جریان، احتمال اضمحلال برخی گردابه‌ها افزایش می‌یابد. شکل ۹ (ب) نیز تغییرات زمانی پالینستروفی را برای همین شرایط نشان می‌دهد. همانطور که در این دو شکل واضح است در شرایطی که میزان انتشار ورتیستی در میدان افزایش یافته

متناوب تکرار می‌شوند. هر دو مسئله مورد بررسی از این الگو پیروی می‌کنند.

در ادامه به بررسی و مطالعه کمیت‌هایی مانند انس تروفی<sup>۱</sup> و پالینستروفی<sup>۲</sup> برای میدان جریان موردنظر به منظور بررسی تأثیرات تولید و اضمحلال آشفتگی و انرژی جنبشی میدان پرداخته شده است. مشخصاً بررسی این دو متغیر که کمیت‌هایی انتگرالی در محدوده میدان جریان موردنظر، محسوب می‌شوند، می‌تواند به چگونگی تغییر رفتار میدان جریان از شکل کاملاً تحت تأثیر اثرات اینرسی به میدان با غلبه اثرات لزجت کمک کند؛ بنابراین، برای بررسی بیشتر اضمحلال گردابه‌ها ناشی از کاهش اثر استهلاک، در شکل ۷ خطوط هم‌تراز انستروفی محلی با استفاده از رابطه (۱۶) در آخرین گام زمانی برای هر دو مسئله نمایش داده شده است.

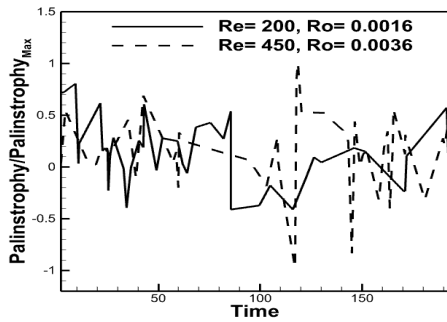
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \|\nabla \times u\|^2 = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 \quad (16)$$

با مشاهده نتایج حاصل می‌توان بیان کرد که بیشینه مقدار انستروفی با افزایش عدد رینولدز، افزایش یافته و گسترش نواحی قرمز رنگ کاملاً نمایانگر این موضوع می‌باشد. این موضوع اهمیت اتلاف را برای بقای آشفتگی با زیاد شدن عدد رینولدز بیان می‌کند.



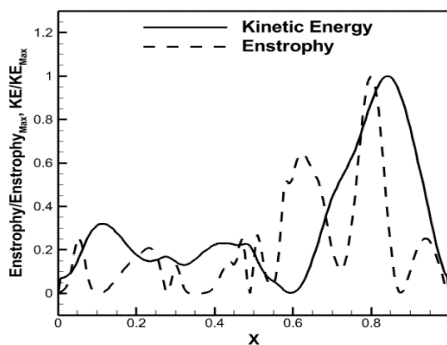
شکل (۸): خطوط هم‌تراز تابع جریان به ازای عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ برای (الف)  $t=10$ ، (ب)  $t=20$ ، (ج)  $t=80$  و (د)  $t=90$

<sup>1</sup>Enstrophy  
<sup>2</sup>Palinstrophy

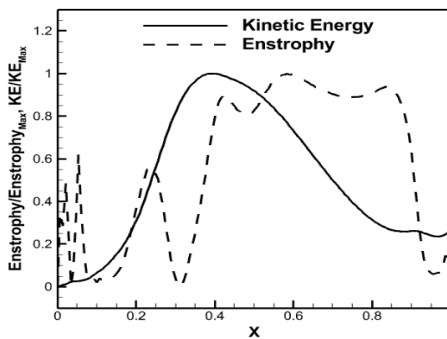


(ب)

شکل (۹): تغییرات (الف) انستروپی کل نسبی و (ب) پالینستروپی کل نسبی برحسب زمان (روز) برای دو مسئله موردنظر



(الف)



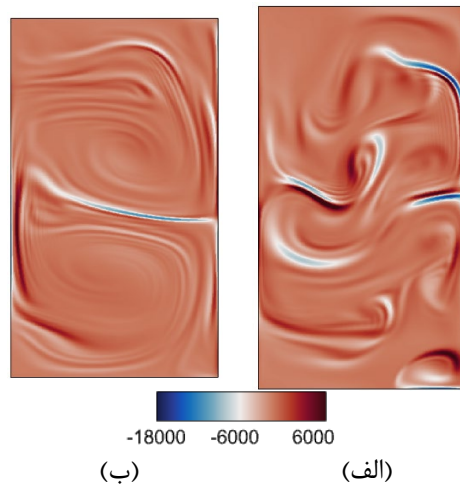
(ب)

شکل (۱۰): تغییرات انرژی جنبشی نسبی و انستروپی نسبی در  $y = 0$  به ازای (الف) عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ و (ب) عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶

۷- نتیجه گیری

در این پژوهش به شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان شبه‌ژئوستر و فیک تک‌لایه پرداخته شده است. بدین منظور شبیه‌سازی عددی معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک با استفاده از طرح عددی آراکاو و روش تفاضل مرکزی برای مشتقات مکانی و همچنین روش رانگ - کوتا برای انتگرال‌گیری زمانی صورت گرفته است. برای دو ترم اتلاف و نیرو نیز به ترتیب از فرم لاپلاسی و نیروی اجباری متکی بر

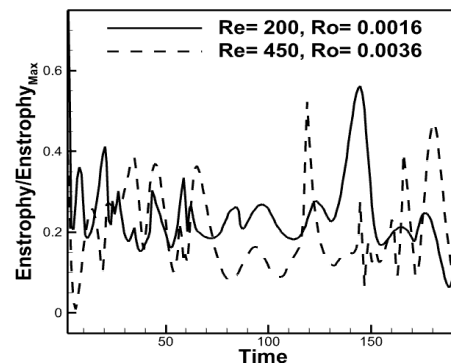
مقدار انستروپی کاسته شده و این بدین معنی است که میزان انرژی جنبشی میدان جریان افزایش یافته است. از طرفی با مشاهده تغییرات کمیت پالینستروپی مشاهده می‌شود در زمان‌هایی که میزان این متغیر کاسته شده و در نتیجه فرآیند انتشار ورتیسیتی در میدان کاهش یافته، متأثر از کاهش میزان انرژی جنبشی میدان جریان، مقدار انستروپی افزایش یافته است. برای بررسی بیشتر این موضوع، در شکل ۱۰ تغییرات نسبی انرژی جنبشی و انستروپی در نقطه مشخص  $y = 0$  برای دو مسئله موردنظر آورده شده است. مطابق شکل واضح است که با افزایش انرژی جنبشی مقدار انستروپی و به دنبال آن اتلافات سیستم، کاهش یافته زیرا در صورتی که در میدان جریان ساختارهای گردابه‌ای بزرگ مقیاس وجود داشته باشد مقدار انرژی جنبشی به سبب وجود آنها افزایش یافته و در پی آن انستروپی که مفهومی برای نشان دادن سطح اتلاف انرژی است، کاهش خواهد داشت.



(ب)

(الف)

شکل (۸): خطوط هم‌تراز پالینستروپی در آخرین گام زمانی برای (الف) عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ و (ب) عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶



(الف)

- numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I", *J. Comput. Phys.* Vol. 135, No. 2, pp.103-114, 1997. Doi: 10.1006/jcph.1997.5697
- [6] Lilly, D. K., "On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems", *Mon. Weather. Rev.* Vol. 93, No. 1, pp.11-25, 1965. Doi: 0493(1965)093%3C0011:otson%3E2.3.co;2
- [7] Edwards, T. K., Smith, L. M., and Stechmann, S. N., "Spectra of atmospheric water in precipitating quasi-geostrophic turbulence", *Geophys. Astro. Fluid.* Vol. 114, No. 6, pp.715-741, 2020. Doi: 10.1080/03091929.2019.1692205
- [8] Barbi, G., Capacci, D., Chierici, A., Chirco, L., Giovacchini, V., and Manservigi, S., "A numerical approach to the fractional Laplacian operator with applications to quasi-geostrophic flows", *J. Phys. Conf.* pp.012013, 2022. Doi: 10.1088/1742-6596/2177/1/012013
- [9] Rahman, S. M., San, O. and Rasheed, A., "A hybrid approach for model order reduction of barotropic quasi-geostrophic turbulence", *Fluids.* Vol. 3, No. 4, pp.86, 2018. Doi: 10.3390/fluids3040086
- [10] Williamson, D. L., "Integration of the barotropic vorticity equation on a spherical geodesic grid", *Tellus.* Vol. 20, No. 4, pp.642-653, 1968. Doi: 10.1111/j.2153-3490.1968.tb00406.x
- [11] Li, Y., and Chao, J., "Preferred equilibrium solutions of the barotropic vorticity equation", *Theor. Appl. Climatol.* Vol. 141, No. 1-2, pp.433-441, 2020. Doi: 10.1007/s00704-020-03232-1
- [12] Abd-el-Malek, M. B., and Amin, A. M., "Lie group method for solving viscous barotropic vorticity equation in ocean climate models", *Computer Math. Appl.* Vol. 75, No. 4, pp.1443-1461, 2018. Doi: 10.1016/j.camwa.2017.11.016
- [13] Mou, C., Wang, Z., Wells, D. R., Xie., and X. Iliescu, T., "Reduced order models for the quasi-geostrophic equations: A brief survey", *Fluids*, Vol. 6, No. 1, pp.16, 2020. Doi: 10.3390/fluids6010016
- [14] Jamal, S., "New multipliers of the barotropic vorticity equations", *Anal. Math. Phys.* Vol. 10, No. 2, pp.21, 2020. doi: 10.1007/s13324-020-00365-4
- [15] Maulik, R., and San, O., "Dynamic modeling of horizontal eddy viscosity coefficient for quasigeostrophic ocean circulation problems", *J. Ocean. Eng. And Sci.* Vol. 1, pp.300-324, 2016. Doi: 10.1016/j.joes.2016.08.002
- [16] San, O. and Iliescu, T., "A Stabilized proper orthogonal decomposition reduced-order model for large scale quasigeostrophic ocean circulation", *Adv. Comp. Math.* Vol. 41, pp.1289-1319, 2015. Doi: 10.1007/s10444-015-9417-0
- [17] San, O. Staples, A. E., Wang, Z. and Iliescu, T., "Approximate deconvolution large eddy simulation of barotropic ocean circulation model", *Ocean. Model.* Vol. 4, No. 2, pp.120-132, 2011. doi:10.1016/j.ocemod.2011.08.003

باد با دو هسته چرخشی متقارن استفاده شده است. شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله حاکم، برای دو مسئله مجزا مورد بررسی قرار گرفته است که در مسئله اول عدد رینولدز ۲۰۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۱۶ فرض شده و در مسئله دوم عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ در نظر گرفته شده است. هر دو آزمایش تا زمان بدون بعد حداکثر برابر با ۹۰ محاسبه شده‌اند که این مقدار در حدود تقریباً ۷ ماه خواهد بود و به اندازه کافی طولانی می‌باشد تا حالت‌های آماری ثابتی را ثبت کند. در نتایج حاصل از هر دو آزمایش مشخص شده است که جریان پس از طی یک بازه کوتاه در حالت گذرا به یک حالت ثابت آماری در زمان حدود  $t=21/41$  روز همگرا می‌شود؛ بنابراین الگوریتم عددی نتایج دقیقی را برای هر دو آزمایش با توجه به ایجاد یک حالت آماری ثابت، پیش‌بینی می‌کند. همچنین بر اساس مقایسه خطوط هم‌تراز تابع جریان حاصل از نتایج برای این دو آزمایش می‌توان دریافت، تولید هسته‌های چرخشی ناشی از نیروی باد محور با دو هسته چرخشی متقارن در کوتاه‌مدت از یک الگوی مشخص پیروی نمی‌کند و تعداد هسته‌ها در گذر زمان می‌تواند کم یا زیاد شود. با مقایسه خطوط هم‌تراز ورتیسیته نیز مشخص می‌شود که با افزایش عدد رینولدز و عدد راسبی و به دنبال آن کاهش استهلاک و نیروی ناشی از چرخش زمین و نیز غالب شدن رفتارهای همرفتی در میدان جریان، انرژی کافی جریان برای ادامه آشفتگی کم شده و به واسطه عدم وجود منبع ناپایداری، تعدادی از چرخش‌ها مضمحل شده و اثرات اینرسی اهمیت قبل را نخواهد داشت که این فرآیند در آخرین گام‌های زمانی بیشتر مشهود است.

#### ۸- مراجع

- [1] Stewart, R. H. "Introduction to physical oceanography", *Oceanography*, Texas A&M University Libraries, 2008.
- [2] Plata, L., Filonov, A., Tereshchenko, I., Nelly, L., Monzón, C., Avalos, D., and Vargas, C. "Geostrophic currents in the presence of an internal waves field in Bahía de Banderas, México", *e-Gnosis.*, Vol. 4. No. 18, 2006. Doi: 10.7773/cm.v3i2.1013
- [3] Reid, J. L., and Mantyla, A. W. "The effect of the geostrophic flow upon coastal sea elevations in the northern North Pacific Ocean", *J. Geophys. Res.* Vol. 81, No. 18, pp. 3100-3110, 1976. Doi: 10.1029/jc081i018p03100
- [4] Edwards, T. K., Smith, L. M., and Stechmann, S. N., "Spectra of atmospheric water in precipitating quasi-geostrophic turbulence", *Geophys. Astro. Fluid.* Vol. 114, No. 6, pp.715-741, 2020. Doi: 10.1080/03091929.2019.1692205
- [5] Arakawa, A., "Computational design for long-term